Ênio Silveira

MATEMÁTICA
COMPREENSÃO E PRÁTICA

7º ano

MANUAL DO PROFESSOR

Componente curricular: MATEMÁTICA

MODERNA

Ênio Silveira

Engenheiro mecânico pela Universidade Federal do Ceará.
Engenheiro eletricista pela Universidade de Fortaleza.
Diretor de escola particular. Autor de obras didáticas de Matemática.

MATEMÁTICA
COMPREENSÃO E PRÁTICA

7º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

3ª edição

São Paulo, 2015

MODERNA

Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay
Edição de texto: Luana Fernandes de Souza, Dario Martins de Oliveira, Izabel Batista Bueno, Maria Aiko Nishijima, Mateus Coqueiro Daniel de Souza, Zuleide Maria Vilela da Motta Talarico
Assistência editorial: Marcos Gasparetto de Oliveira, Roberto Paulo de Jesus Silva
Preparação de texto: Denise Ceron
Gerência de *design* e produção gráfica: Sandra Botelho de Carvalho Homma
Coordenação de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)
Coordenação de *design* e projeto gráfico: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Aurélio Camilo, Daniel Messias
Capa: Daniel Messias
Foto: Paisagem 360°, Battery Park Night, New York City, NY, 2012.
© Randy Scott Slavin
Coordenação de arte: Patricia Costa, Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Edição de infografia: William Taciro, Mauro César Brosso, Alexandre Santana de Paula
Ilustrações de vinhetas: Daniel Messias
Coordenação de revisão: Adriana Bairrada
Revisão: Cecília Setsuko Oku, Fernanda Marcelino, Leandra Trindade, Rita de Cássia Sam, Thiago Dias, Vânia Cobiaco
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Maria Mendonça
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Bureau São Paulo, Fabio N. Precendo, Marina M. Buzzinaro, Resolução Arte e Imagem
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira,Hélio P. de Souza, Marcio H. Kamoto, Rubens M. Rodrigues, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Viviane Pavani
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Ênio
Matemática : compreensão e prática / Ênio Silveira. — 3. ed. — São Paulo : Moderna, 2015.

Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

15-02026 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2015
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Caro aluno,

Ideias, por mais brilhantes e elaboradas que sejam, só adquirem um sentido maior quando encontram aplicação no dia a dia.

A Matemática jamais deve ser vista como problema, mas sim como solução. Ela nos conduz por caminhos aparentemente tortuosos ou inacessíveis, abrindo atalhos, encurtando distâncias e superando obstáculos cotidianos ou científicos.

Com as situações apresentadas neste livro, você adquirirá conhecimentos que o ajudarão no desenvolvimento da sua formação escolar, pessoal e profissional. Em cada página estudada, tarefa resolvida ou atividade solucionada, você perceberá que a Matemática é uma ferramenta poderosa que pode te ajudar a resolver muitos problemas.

O autor

Aos meus pais,
Isaías, Maria Amélia (*in memoriam*)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ESTRUTURA DE CAPÍTULO

Cada volume está dividido em capítulos, organizados de acordo com esta estrutura:

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Composto de um texto que explora a imagem da abertura e atividades que incentivarão você a refletir sobre o conteúdo que será trabalhado, considerando o conhecimento obtido em capítulos ou em anos anteriores.

PÁGINAS DE ABERTURA

O conteúdo do capítulo é explorado inicialmente em duas páginas de abertura, compostas de uma imagem e o boxe "É hora de observar e discutir".

APRESENTAÇÃO DOS CONTEÚDOS

O conteúdo é apresentado de forma clara e direta.

TROCANDO IDEIAS

Situação introdutória sobre o conteúdo abordado no capítulo.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Contextualização do conteúdo na história da Matemática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Após cada conteúdo estudado, propomos atividades com nível de dificuldade crescente. Algumas delas abordam o cálculo mental e o trabalho com a calculadora. Outras propõem a discussão e a resolução em duplas.

cálculo mental

trabalho com a calculadora

duplas

LENDO E APRENDENDO

Texto que explica e enriquece o conteúdo principal.

RESOLVENDO EM EQUIPE

Em alguns capítulos, há uma proposta de atividade para incentivar a participação coletiva dos alunos na resolução de situações-problema.

TRABALHANDO OS CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS

Atividades que, no final de cada capítulo, abordam todo o conteúdo apresentado. A seção é dividida em duas partes:

- *Revisitando* – composta de atividades de revisão e autoavaliação;
- *Aplicando* – explora o conteúdo por meio de atividades com diferentes níveis de dificuldade, incluindo atividades "Desafio" e algumas do **Enem**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

Números inteiros 10

NILSON CARDOSO

1. Números inteiros 13
2. Reta numérica 16
3. Módulo de um número inteiro 18
4. Números opostos ou simétricos 19
5. Comparação de números inteiros 20
6. Adição de números inteiros 21
7. Subtração de números inteiros 25
8. Multiplicação de números inteiros 28
9. Divisão exata de números inteiros 31
10. Potenciação em que a base é um número inteiro 32
11. Raiz quadrada exata de números inteiros 36
12. Expressões numéricas 37

Trabalhando os conhecimentos adquiridos 40

CAPÍTULO 2

Números racionais 44

G. EVANGELISTA/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

1. Números racionais 47
2. Representação dos números racionais na reta numérica 49
3. Módulo de um número racional 50
4. Oposto de um número racional 51
5. Comparação de números racionais 51
6. Adição e subtração de números racionais 52
7. Multiplicação de números racionais 56
8. Divisão de números racionais 58
9. Potenciação de números racionais 60
10. Raiz quadrada de números racionais 63
11. Expressões numéricas 65

Trabalhando os conhecimentos adquiridos 66

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 3

Expressões algébricas e sentenças matemáticas 70

ROB LEWINE/TETRA IMAGES/GETTY IMAGES

1. Expressões algébricas ... 73
2. Valor numérico de uma expressão algébrica ... 74
3. Termos algébricos ... 76
4. Sentenças matemáticas ... 79

Trabalhando os conhecimentos adquiridos ... 80

CAPÍTULO 4

Equações do 1º grau com uma incógnita 82

JIANAN YU/REUTERS/LATINSTOCK

1. Equações ... 85
2. Raiz de uma equação ... 87
3. Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita ... 88
4. Resolução de problemas ... 93

Trabalhando os conhecimentos adquiridos ... 99

CAPÍTULO 5

Inequações do 1º grau com uma incógnita 104

HUGO CORDEIRO/AP PHOTO/GLOW IMAGES

1. Desigualdades ... 107
2. Inequações equivalentes ... 111
3. Resolução de uma inequação do 1º grau ... 115

Trabalhando os conhecimentos adquiridos ... 116

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 6

Ângulos 118

BEN WOOD/CORBIS/LATINSTOCK

1. O ângulo e seus elementos 121
2. Medida de ângulo 123
3. Transformação de unidades 130
4. Operações com medidas de ângulos 131
5. Ângulos congruentes 134
6. Ângulos adjacentes 136
7. Bissetriz de um ângulo 138
8. Ângulos complementares 140
9. Ângulos suplementares 141
10. Ângulos opostos pelo vértice 142

Trabalhando os conhecimentos adquiridos 144

CAPÍTULO 7

Razão 146

DMITRY KALINOVSKY/SHUTTERSTOCK

1. Razão 149
2. Razão entre grandezas de mesma natureza 152
3. Razão entre grandezas de naturezas diferentes 156

Trabalhando os conhecimentos adquiridos 158

CAPÍTULO 8

Probabilidade e Estatística 162

BRUNO VEIGA/TYBA

1. O que é probabilidade? 165
2. Cálculo de probabilidades 166
3. Estatística 168
4. Média aritmética simples, média aritmética ponderada, mediana e moda 170

Trabalhando os conhecimentos adquiridos 176

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 9

RADE KOVAC/SHUTTERSTOCK

Proporção 180

1. Proporção 183
2. Propriedade fundamental das proporções 185
3. Sequências de números diretamente proporcionais 188
4. Sequências de números inversamente proporcionais 191

Trabalhando os conhecimentos adquiridos 194

CAPÍTULO 10

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Grandezas e regra de três 196

1. Grandezas proporcionais 199
2. Regra de três simples 202
3. Regra de três composta 204

Trabalhando os conhecimentos adquiridos 207

CAPÍTULO 11

PALÊ ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

Porcentagem e juro simples 210

1. Porcentagem 213
2. Cálculo de acréscimos e descontos 218
3. Juro simples 220

Trabalhando os conhecimentos adquiridos 224

Respostas 228

Sugestões de leitura 237

Bibliografia 238

Lista de siglas 240

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

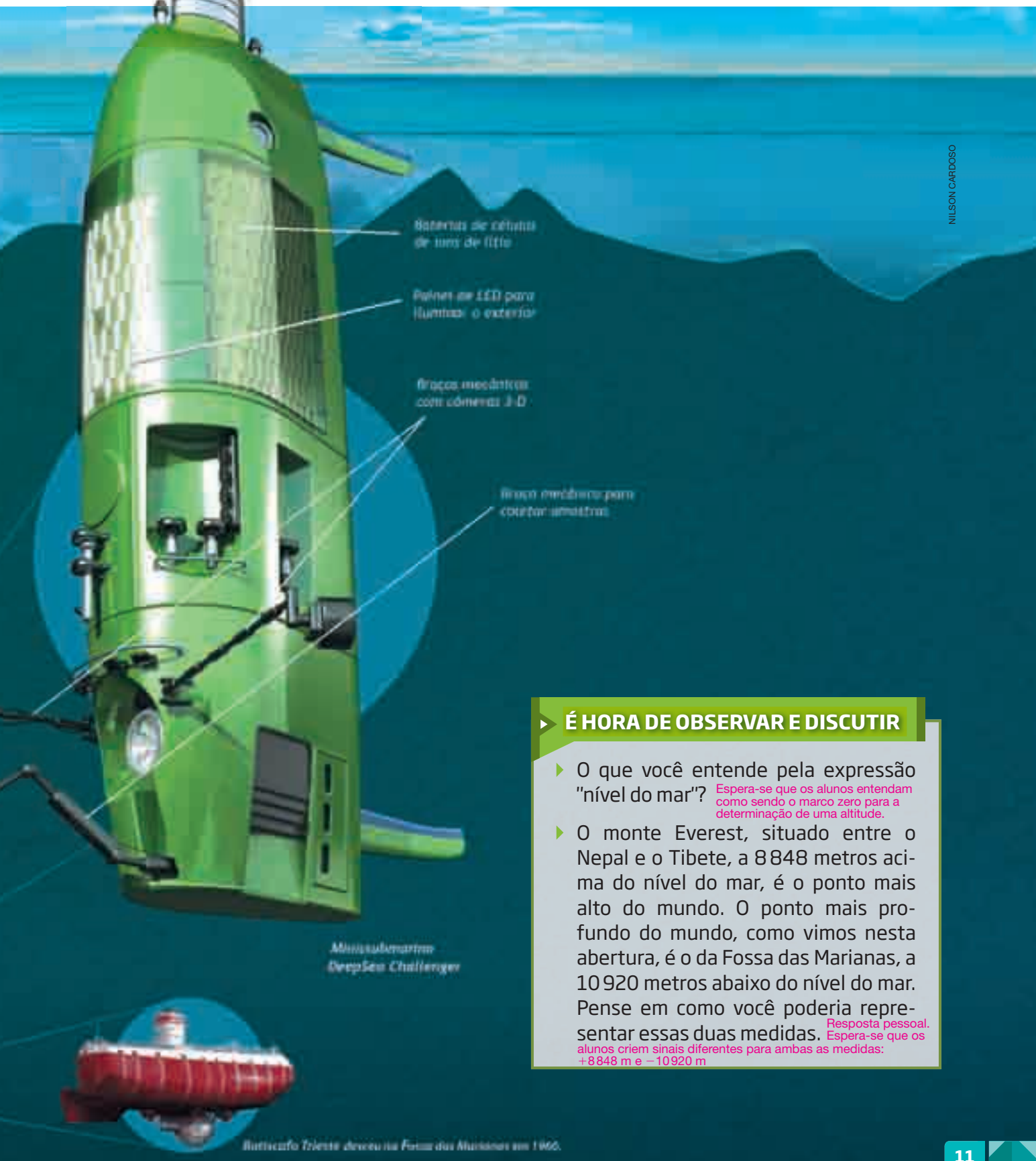
CAPÍTULO

1 NÚMEROS INTEIROS

Embora comprimento seja uma grandeza contínua, portanto expressa em números reais, apresentamos aqui apenas dados em números inteiros. Alguns desses dados não são consensuais a inúmeras fontes existentes. Também podem sofrer alterações em função de novas pesquisas ou quebra de recordes.

Em março de 2012, para filmar um documentário em 3-D, o diretor de cinema James Cameron desceu ao ponto mais profundo do Oceano Pacífico, a Fossa das Marianas. Para isso, ele usou o minissubmarino *DeepSea Challenger*. Esse nome foi dado ao veículo em homenagem ao abismo de Challenger, o ponto mais profundo da Fossa das Marianas.

Neste capítulo, vamos trabalhar com os números inteiros. Espera-se que os alunos aprendam as principais operações envolvendo números inteiros e apliquem-nas na resolução de problemas. Comente com eles que os números naturais correspondem aos números inteiros positivos com o zero. Aproveite o infográfico desta abertura para mostrar o uso dos números inteiros negativos na representação das medidas abaixo do nível do mar.



NILSON CARDOSO

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

- O que você entende pela expressão "nível do mar"? Espera-se que os alunos entendam como sendo o marco zero para a determinação de uma altitude.
- O monte Everest, situado entre o Nepal e o Tibete, a 8 848 metros acima do nível do mar, é o ponto mais alto do mundo. O ponto mais profundo do mundo, como vimos nesta abertura, é o da Fossa das Marianas, a 10 920 metros abaixo do nível do mar. Pense em como você poderia representar essas duas medidas. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos criem sinais diferentes para ambas as medidas: +8 848 m e −10 920 m

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

No Brasil, a unidade de temperatura que usamos é o grau Celsius (°C). Observe, a seguir, a temperatura registrada em três municípios brasileiros, em datas diferentes.

Natal (RN) **30 °C**

HANS VON MANTEUFFEL/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

Forte dos Reis Magos, em Natal (RN), 2006.

São José dos Ausentes (RS) **−3 °C**

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Neve encobre acesso a casa em São José dos Ausentes (RS), 2013.

Rio de Janeiro (RJ) **23 °C**

ALESSANDRO VIANA/TYBA

Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro (RJ), 2013.

- Em qual dos três municípios foi registrada a temperatura mais alta?

  Em Natal: 30 °C, ou seja, trinta graus Celsius.

- Verificando a temperatura registrada em São José dos Ausentes (RS), o que indica que essa temperatura estava abaixo de zero grau?

  A temperatura de São José dos Ausentes (RS) é representada por um número negativo (−3 °C).

Os números naturais não são suficientes para representar algumas situações. No caso de temperaturas, altitudes e saldos bancários, muitas vezes precisamos utilizar números menores que zero, chamados **números negativos**.

Esses números negativos reunidos com os números naturais, que você já conhece, formam o conjunto dos números inteiros, que estudaremos neste capítulo.

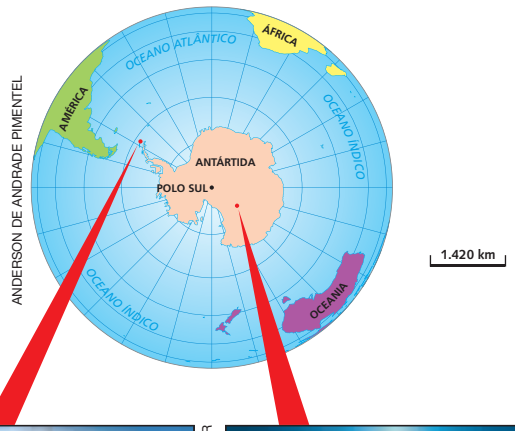
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Números inteiros

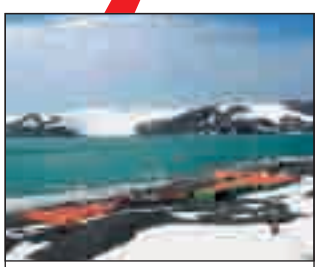
Observe o texto a seguir.

Estações de pesquisa localizadas na Antártida

A Antártida é o local mais frio do planeta. Em 1984, foi instalada nesse continente uma base brasileira de pesquisa: a Estação Comandante Ferraz. Em fevereiro de 2012, a base foi destruída em um incêndio e há um projeto para sua reconstrução, com previsão para terminar em março de 2016. Na Ilha Rei George, onde se localizava a estação brasileira, a temperatura se mantém, normalmente, abaixo de 5 °C. Além do Brasil, vários outros países instalaram bases na Antártida. A Estação Vostok é uma base russa que funciona desde 1957. Nessa estação, localizada no interior do continente, a temperatura se mantém muito baixa durante o ano todo. A temperatura média anual é de −50 °C, com máximas de −30 °C no verão e mínimas de −70 °C no inverno.

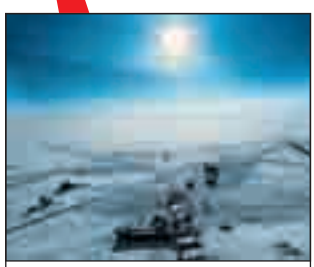


ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL



ANA NASCIMENTO/ABR/CC BY 3.0 BR

Estação Comandante Ferraz, em 2 fev. 2004.



RIA NOVOSTI/KEYSTONE BRASIL

Estação Vostok, em 2 jan. 1967.

No texto, verificamos a expressão "abaixo de 5 °C" e os números "−50 °C", "−30 °C" e "−70 °C".

A expressão "abaixo de 5 °C" se refere a todas as temperaturas menores que 5 °C. Se considerarmos apenas as temperaturas com valores inteiros, teremos:

$$4\ °C, 3\ °C, 2\ °C, 1\ °C, 0\ °C, -1\ °C, -2\ °C, -3\ °C, \ldots$$

Os números −1, −2, −3... são chamados **números negativos**. Lemos: "menos um", "menos dois", "menos três" e assim por diante.

O número zero serve como referência na classificação dos números em positivos ou negativos.

$$\underbrace{\ldots \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1}_{\text{números negativos}} \quad 0 \quad \underbrace{+1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \quad +6 \quad \ldots}_{\text{números positivos}}$$

GUILHERME CASAGRANDI

Observe que o número zero não é positivo nem negativo.

Para representar o conjunto dos números inteiros, usamos o $\mathbb{Z}$, originário da palavra *Zahl*, que, em alemão, significa "número".

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$$

Z é também a primeira letra do sobrenome do matemático alemão Ernest Zermelo, que se dedicou ao estudo dos números inteiros.

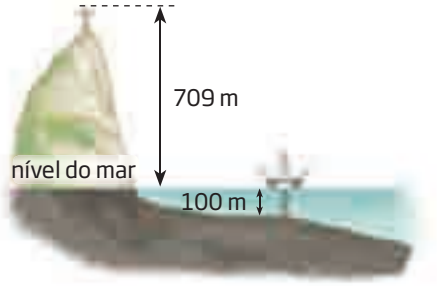
As reticências são utilizadas para indicar que o conjunto dos números inteiros é infinito nos dois sentidos: no dos números positivos e no dos números negativos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Veja três situações em que os números negativos são utilizados.

Para representar altitudes

Associa-se o nível do mar à altitude zero. Acima do nível do mar, a altitude é positiva; abaixo do nível do mar, a altitude é negativa.



GEORGE TUTUMI

O Cristo Redentor (RJ) é um monumento situado no topo do Morro do Corcovado, a 709 metros **acima** do nível do mar. Sua altitude pode ser indicada por +**709** m (lemos: "mais setecentos e nove metros").

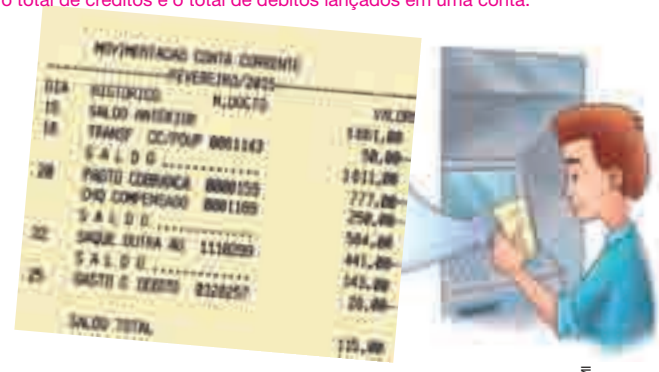
O poço pioneiro de extração de petróleo da Bacia de Campos (RJ) foi o de Garoupa, a 100 metros **abaixo** do nível do mar. Sua altitude pode ser indicada por −**100** m.

Em transações bancárias

Alguns termos utilizados nos extratos bancários:
- Saque: retirada de determinada importância do banco.
- Débito: quando se retira uma importância do banco, lança-se um débito na conta.
- Crédito: quando se deposita uma importância no banco, lança-se um crédito na conta.
- Saldo: diferença entre o total de créditos e o total de débitos lançados em uma conta.

Observe ao lado a reprodução de um extrato bancário.

Os valores negativos nos extratos bancários correspondem aos débitos e são representados com o sinal de menos à direita. Nesse exemplo, os débitos no extrato são: transferência de dinheiro (TRANSF) para outra conta, pagamento (PAGTO) de uma conta, uso do cartão (GASTO C DÉBITO), cheques (CHQ) compensados e saques.


GEORGE TUTUMI

Extrato bancário é um relatório que contém informações sobre a movimentação e o saldo de uma conta bancária.

Esses valores são subtraídos do saldo da conta bancária, fazendo-o diminuir. Observe que, no dia 15, o saldo é R$ 1 661,00 e, no dia 25, é R$ 115,00.

É comum escutarmos a expressão "saldo negativo". Isso ocorre quando debitamos da conta um valor maior do que o saldo existente, ou seja, um valor maior do que dispomos na conta.

Explique aos alunos que o saldo negativo ocorre quando sacamos dinheiro do limite de crédito que o banco nos proporciona e que pagamos taxas sobre esse valor.

Saldo de gols

Observe, no quadro abaixo, a classificação de quatro times na 31ª rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol da série A em 2014:

Classificação	Clube	Gols pró	Gols contra	Saldo de gols
1º	Cruzeiro	54	32	22
2º	São Paulo	50	35	15
9º	Goiás	30	31	−1
10º	Atlético-PR	35	38	−3

ALEXANDRE SCHNEIDER/GETTY IMAGES

Os números negativos −1 e −3 que aparecem nos saldos de gols do Goiás e do Atlético-PR representam a diferença entre o número de gols pró e o número de gols contra de cada um desses times. Nestes casos, o saldo de gols é negativo porque o número de gols pró é menor que o número de gols contra.

UM POUCO DE HISTÓRIA

A origem dos números negativos

A noção de número negativo levou muito tempo para se estabelecer na história da Matemática. Passaram mais de 1000 anos entre a aparição dos números negativos e sua utilização.

Na Antiguidade, os hindus já discutiam a existência dos números negativos. Eles criaram um tipo de símbolo para representar dívidas, o qual, posteriormente, chamaríamos de negativo.

O primeiro registro explícito de números negativos foi feito em 628 d.C. pelo matemático hindu Brahmagupta (598-670).

Em 1489, Johann Widman (1460-1498) publicou uma aritmética comercial *Rechenuing auff allen Kauffmancchafft*, o mais antigo livro em que os sinais + e − foram registrados.

Em 1544, Michael Stifel (1487-1567) publicou *Arithmetica integra*, a mais importante obra alemã sobre álgebra do século XVI, cujo aspecto mais relevante é o tratamento dos números negativos, dos radicais e da potência. Stifel chamava os números negativos de "números absurdos".

Dados obtidos em: BOYER, Karl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 160, 206.

DIOGO SAITO

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva, no caderno, por extenso, cada um dos números.

a) +7 (mais sete) b) +4 (mais quatro) c) −12 (menos doze) d) −100 (menos cem)

2 Escreva com algarismos o número que representa:

a) mais quinze; +15
b) menos trinta; −30
c) quarenta negativo; −40
d) cinquenta positivo. +50

3 Observe os seguintes números: +7, −3, +4, +18, +76, −9, 0, +25 e −36. Agora, responda:

a) Quais deles são positivos? 7, 4, 18, 76, 25
b) Quais deles são negativos? −3, −9, −36
c) O número zero é positivo ou negativo? Não é positivo nem negativo.

4 Represente, com números inteiros, cada uma das situações a seguir.

a) Débito de R$ 3000,00. −R$ 3000,00
b) Lucro de R$ 1200,00. +R$ 1200,00
c) Elevação de 2300 m. +2300 m
d) Depressão de 500 m. −500 m

5 Letícia pegou o elevador no 3º subsolo e subiu até o 10º andar. Quantos andares ela percorreu? 13 andares

6 Observe o quadro abaixo, com a classificação de cinco seleções até a 14ª rodada das eliminatórias da América do Sul para a Copa do Mundo da Fifa Brasil 2014, e expresse o saldo de gols (diferença entre os gols feitos e os gols sofridos), em números inteiros, de cada seleção.

Classificação	Gols pró	Gols contra
1º Argentina	25	9 (16)
2º Colômbia	21	7 (14)
3º Equador	17	12 (5)
4º Chile	21	21 (0)
5º Uruguai	18	21 (−3)

Dados obtidos em: <pt.fifa.com>. Acesso em: 8 ago. 2013.

ARGENTINA: WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK; EQUADOR: ATLASPIX/SHUTTERSTOCK; COLÔMBIA: PAUL STRINGER/SHUTTERSTOCK; URUGUAI E CHILE: GLOBE TURNER/SHUTTERSTOCK

7 Em 20/1, o saldo da conta bancária de Roberta era R$ 1560,00. Nos três dias seguintes, ela efetuou estas operações financeiras:

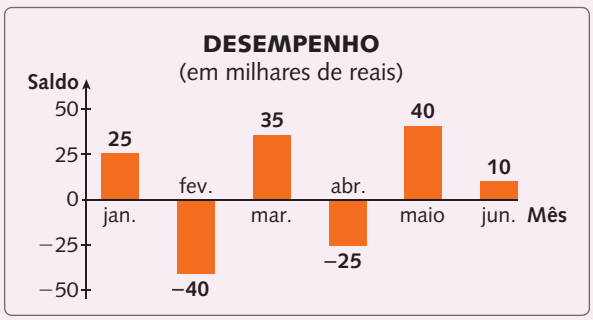
- em 21/1 ⟶ retirou a metade do saldo;
- em 22/1 ⟶ depositou R$ 180,00;
- em 23/1 ⟶ retirou R$ 300,00.

Copie no caderno o quadro abaixo, substituindo cada ■ de acordo com as operações financeiras efetuadas.

Dia	Saldo anterior	Crédito	Débito	Saldo
21/1	R$ 1560,00 ■	■	R$ 780,00 ■	R$ 780,00 ■
22/1	R$ 780,00 ■	■ R$ 180,00	■	R$ 960,00 ■
23/1	■ R$ 960,00	■	R$ 300,00 ■	■ R$ 660,00

MODELO MODELO

8 O gráfico representa o desempenho de uma microempresa durante seis meses.



Dados obtidos pela microempresa.

a) Em que mês o prejuízo foi de 40 mil reais? fevereiro

b) Qual foi o saldo do mês de março? 3,5 mil reais

c) Durante esses seis meses, a microempresa teve lucro ou prejuízo? De quanto? lucro; 45 mil reais

9 Certo dia, Emília viajou de Berlim (Alemanha) para Berna (Suíça). Quando saiu de Berlim, a temperatura era de −2 °C e, ao chegar em Berna, a temperatura era de −8 °C. Qual era a diferença entre as temperaturas de Berlim e Berna nesse dia? 6 °C

GARY718/SHUTTERSTOCK

Berlim, na Alemanha.

FEDOR SELIVANOV/SHUTTERSTOCK

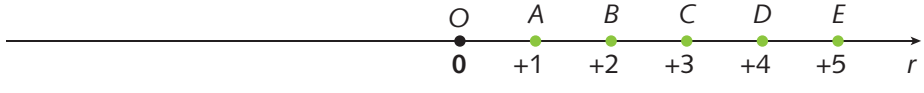
Berna, na Suíça.

GUILHERME CASAGRANDI

2 Reta numérica

Podemos representar os números inteiros em uma reta numérica. Para isso, traçamos uma reta *r* e sobre ela marcamos o ponto *O*, chamado **origem**, que corresponde ao número zero.

Usando a mesma unidade de comprimento, assinalamos pontos consecutivos à direita da origem e, para cada ponto, fazemos corresponder um **número inteiro positivo**. Veja:

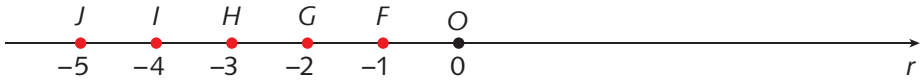


GUILHERME CASAGRANDI

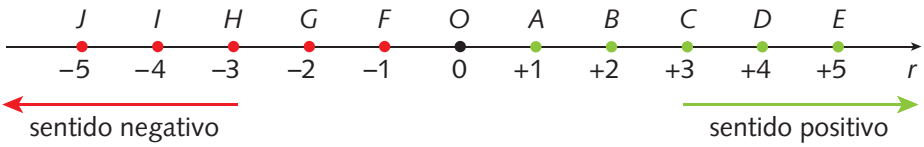
Repetimos esse procedimento para representar pontos situados à esquerda da origem, aos quais fazemos corresponder os **números inteiros negativos**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

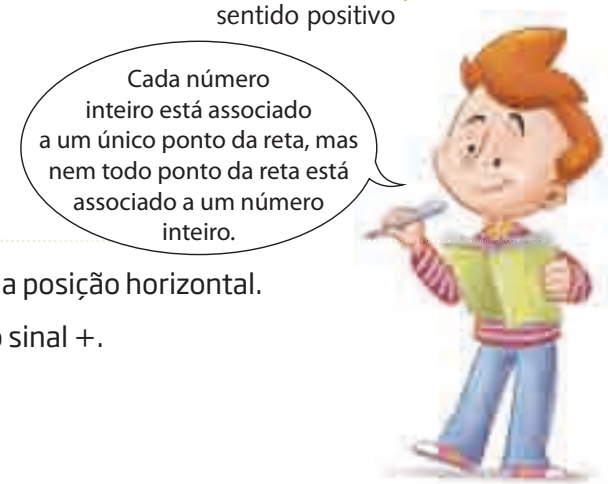
Observe:



Podemos reunir em uma só reta numérica os números inteiros positivos e os negativos.



Dessa forma, estabelecemos uma correspondência entre os números inteiros e os pontos marcados na reta.



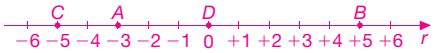
GUILHERME CASAGRANDI

GEORGE TUTUMI

Observações

1. A reta numérica não precisa ser representada na posição horizontal.
2. Os números positivos podem ser escritos sem o sinal +.
   Por exemplo: $+5 = 5$

2.



GUILHERME CASAGRANDI

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe a reta numérica e responda às questões.

a) Que número corresponde ao ponto B? −1
b) Qual é o ponto correspondente ao número −4? ponto A
c) Qual é o ponto correspondente ao número +5? ponto D
d) Qual é o ponto que corresponde a +2? ponto C
e) O ponto E corresponde a que número? +6

2 Desenhe uma reta para representar números inteiros e, depois, localize nela os pontos:
a) A, que corresponde a −3;
b) C, que corresponde a −5;
c) B, que corresponde a +5;
d) D, que corresponde a 0.

3 Trace uma reta numérica e represente nela os números inteiros maiores ou iguais a −2 e menores que 5.

4 Um ponto é deslocado, a partir do zero, seis unidades sobre uma reta numérica no sentido positivo e, em seguida, 10 unidades no sentido negativo. Determine o número inteiro correspondente ao ponto após esse percurso. −4

5 Em um dia de muito frio em Cambará do Sul (RS), a temperatura esteve em −1 °C. À noite, ela chegou a −6 °C. Do dia para a noite, a temperatura diminuiu quantos graus? 5 °C

VINÍCIUS COSTA/FUTURA PRESS

Neve em Cambará do Sul (RS), 2011.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

GUILHERME CASAGRANDI

UM POUCO DE HISTÓRIA

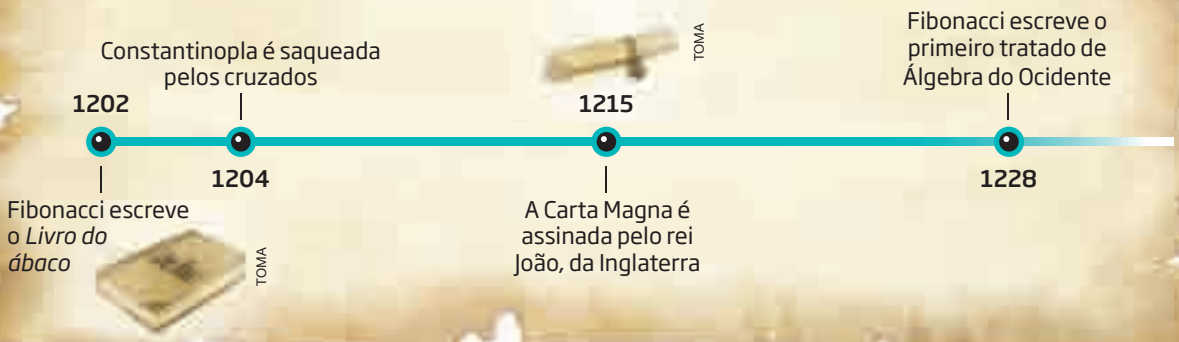
TOMA

DIOGO SAITO

Leonardo de Pisa (1175-1250)

Leonardo de Pisa, matemático italiano mais conhecido como Fibonacci, introduziu e generalizou o uso da notação árabe no continente europeu. É autor do livro *Liber abaci* (*Livro do ábaco*), de 1202, um clássico da Matemática, em que trata de números, problemas algébricos, algarismos árabes e também do que viria a ser o início da contabilidade. Entre os problemas propostos está o que deu origem à famosa sequência de Fibonacci, uma sucessão de termos numéricos que segue um padrão.

Os números de Fibonacci formam uma sequência em que cada número, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores. Assim: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...



TOMA

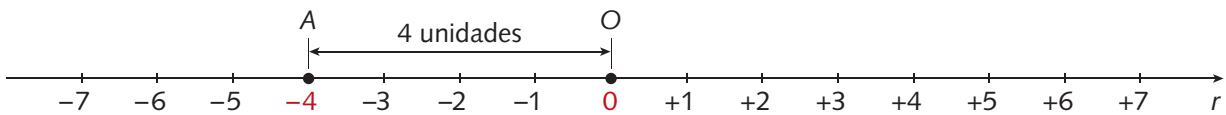
TOMA

3 Módulo de um número inteiro

A distância de um ponto na reta numérica até a origem *O* é chamada de **módulo** ou **valor absoluto** do número associado a esse ponto. Representamos o módulo de um número colocando-o entre duas barras verticais: | |.

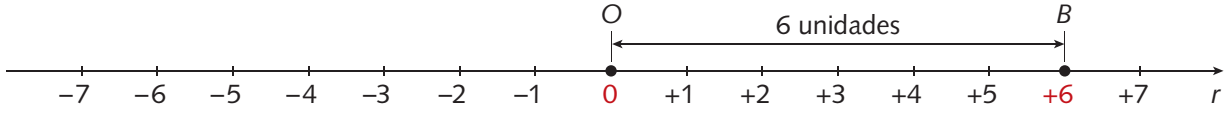
Exemplos

- A distância do ponto *A* à origem *O* é 4 unidades.



O módulo de -4 é 4. Indicamos: $|-4| = 4$

- A distância do ponto *B* à origem *O* é 6 unidades.



O módulo de $+6$ é 6. Indicamos: $|+6| = 6$

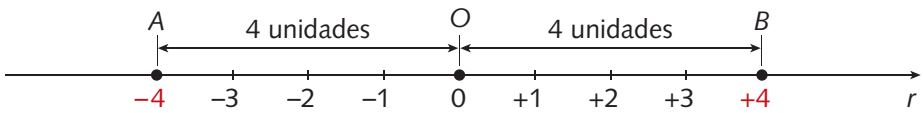
GUILHERME CASAGRANDI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- O módulo de zero é zero. Assim: $|0| = 0$
- $|-10| = 10$ (lemos: "módulo de menos dez é igual a dez")
- $|9| = 9$ (lemos: "módulo de nove é igual a nove")
- $|+5| = 5$ (lemos: "módulo de mais cinco é igual a cinco")

4 Números opostos ou simétricos

Observe os pontos *A* e *B* localizados na reta numérica abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Verificamos que os pontos *A* e *B* ocupam posições simétricas em relação à origem, pois estão à mesma distância da origem e se localizam em lados opostos. Dizemos que -4 e 4 são números **opostos** ou **simétricos**.

Exemplos

- 15 é o oposto ou simétrico de -15. $15 = -(-15)$
- -17 é o oposto ou simétrico de 17. $-17 = -(+17)$
- 10 é o oposto ou simétrico de -10. $10 = -(-10)$
- $-1\,000$ é o oposto ou simétrico de $+1\,000$. $-1\,000 = -(+1\,000)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine:
a) o oposto de -6; $+6$
b) o oposto de 100; -100
c) o oposto de -7; $+7$
d) o oposto de 8. -8

2 Escreva no caderno o valor absoluto de:
a) $+13$ 13
b) $+50$ 50
c) -21 21
d) -116 116

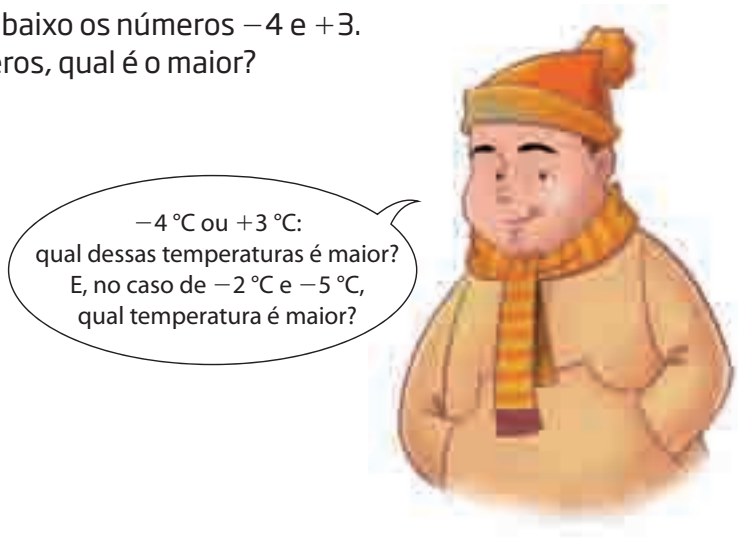
3 Determine:
a) $|-16|$ 16
b) $|-20|$ 20
c) $|+35|$ 35
d) $|-1|$ 1

4 Responda às questões.
a) Qual é o módulo de -13? 13
b) Qual é o oposto de -318? $+318$
c) Quais números inteiros têm valor absoluto igual a 17? $+17$ e -17

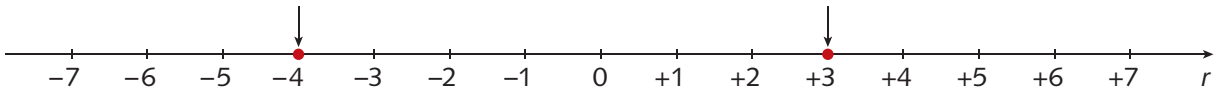
5 Quantos números inteiros apresentam:
a) módulo menor que zero? nenhum
b) módulo igual a zero? Um número, o próprio zero.
c) módulo maior que zero? infinitos

5 Comparação de números inteiros

Observe na reta numérica abaixo os números -4 e $+3$. Comparando esses dois números, qual é o maior?



GEORGE TUTUMI

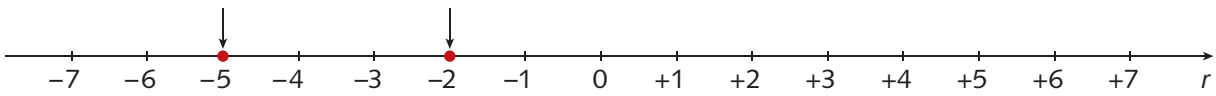


O número $+3$ é maior que -4, pois está localizado à direita deste na reta numérica.

Assim, dizemos que $+3$ é maior que -4.

Indicamos: $+3 > -4$ (lemos: "mais três é maior que menos quatro")

Agora, comparando os números -2 e -5, qual é o maior?



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Veja que -2 está localizado à direita de -5. Logo, -2 é maior que -5.

Indicamos: $-2 > -5$ (lemos: "menos dois é maior que menos cinco")

Dados dois números inteiros quaisquer, o maior deles será o que estiver à direita do outro na reta numérica.

De maneira geral:

- qualquer número negativo é menor que zero;
- qualquer número positivo é maior que zero;
- todo número positivo é maior que qualquer número negativo.

Observação

Dado um número inteiro qualquer na reta numérica, o "vizinho" dele à direita é seu sucessor e o "vizinho" dele à esquerda é seu antecessor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

LUIZ RUBIO

1 Represente os números abaixo em uma reta numérica:

−1, 3, −4, 7, 0, −2, −6, 2

Agora, responda às questões.

a) Qual é o maior desses números? 7

b) Qual é o menor desses números? −6

c) Qual é o número inteiro situado entre −4 e −2? −3

2 Escreva no caderno os números inteiros abaixo, em ordem decrescente, usando o sinal >:

−4, 7, −8, 3, −1, 0, 6

7 > 6 > 3 > 0 > −1 > −4 > −8

3 Usando os sinais > ou <, faça a comparação entre os seguintes pares de números inteiros:

a) +3 ■ +2 >
b) −5 ■ −6 >
c) −4 ■ +4 <
d) 0 ■ −1 >
e) +2 ■ 0 >
f) −2 ■ −1 <
g) −3 ■ −4 >
h) 0 ■ −10 >

4 Determine:

a) o número inteiro antecessor de −9; −10

b) o número inteiro sucessor de −14; −13

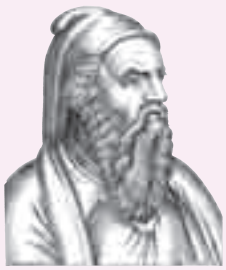
c) os três primeiros números inteiros menores que +1; 0, −1 e −2

d) o número inteiro sucessor de −13. −12

5 Imaginando que Pitágoras tenha nascido no ano 580 a.C. e Tales de Mileto, no ano 624 a.C., pergunta-se:

a) Quem nasceu primeiro? Tales de Mileto

b) Qual é a diferença de idade entre esses dois homens? 44 anos



BIBLIOTECA NACIONAL DE MADRID, ESPANHA

Pitágoras foi filósofo e matemático grego.

IRAQ MUSEUM INTERNATIONAL, BAGHDAD

Tales foi um sábio da Grécia antiga.

6 Responda às questões.

a) Qual é o maior número inteiro negativo menor que −50? −51

b) Qual é o menor inteiro de três algarismos? −100

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6 Adição de números inteiros

Observe as situações a seguir.

Situação 1

Ana verificou que o saldo da sua conta bancária era R$ 200,00 negativos. Logo, a seguir, fez uma retirada de R$ 400,00. Qual era o saldo da conta de Ana após essa retirada?

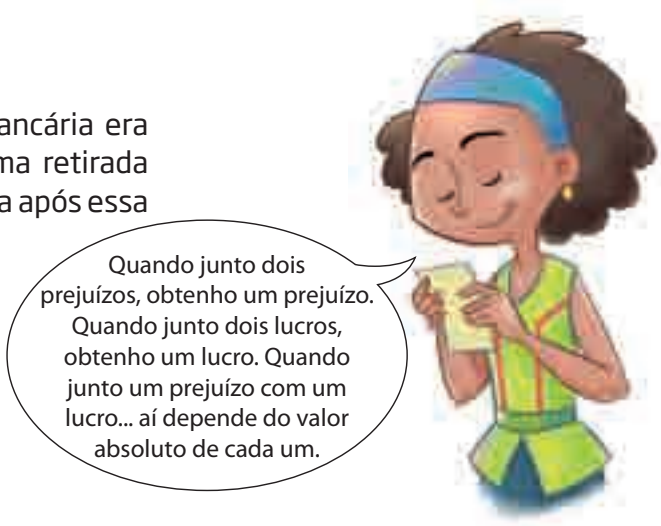
Temos:

saldo inicial: −200

retirada: −400

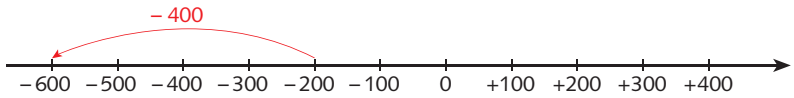
Para responder à pergunta, podemos fazer:

(−200) + (−400) = −600



GEORGE TUTUMI

Observe a representação da adição $(-200) + (-400) = -600$ na reta numérica:



LUIZ RUBIO

Portanto, Ana ficou com R$ 600,00 de saldo negativo final na sua conta.

> Em adições cujas parcelas têm o mesmo sinal, adicionamos os valores absolutos dessas parcelas e mantemos o sinal.

Exemplos

- $(-10) + (-17) = -27$
- $(+10) + (+13) = +23$
- $(-85) + (-15) = -100$
- $(-70) + (-90) = -160$

Situação 2

O saldo da conta bancária de Ronaldo era R$ 300,00. A seguir, fez uma retirada de R$ 200,00 dessa conta. Com quantos reais ficou o saldo de sua conta?

Temos:

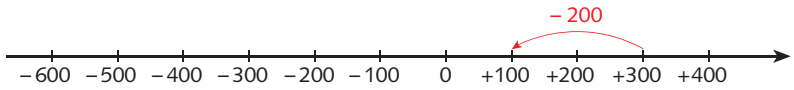
saldo inicial: $+300$

retirada: -200

Para responder à pergunta, podemos fazer:

$(+300) + (-200) = +100$

Observe a representação dessa adição na reta numérica:



LUIZ RUBIO

Portanto, Ronaldo ficou com R$ 100,00 de saldo positivo final na sua conta.

Situação 3

O saldo bancário da conta de Liana em 4 de outubro era R$ 350,00 negativos. No dia seguinte, ela fez um depósito de R$ 600,00 em sua conta bancária. Qual foi o saldo que ficou na conta de Liana após esse depósito?

Temos:

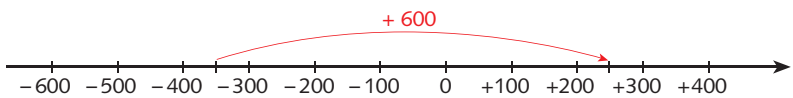
saldo inicial: -350

depósito: $+600$

Para responder à pergunta, podemos fazer:

$(-350) + (+600) = +250$

Observe a representação dessa adição na reta numérica:



LUIZ RUBIO

Portanto, o saldo que ficou na conta de Liana foi de R$ 250,00.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Em adições cujas parcelas têm sinais contrários, subtraímos os valores absolutos dessas parcelas e mantemos o sinal do número de maior valor absoluto.

Exemplos

- $(-5) + (+7) = +2$
- $(+10) + (-13) = -3$
- $(-35) + (+20) = -15$
- $(+50) + (-90) = -40$

Propriedades da adição de números inteiros

Explique aos alunos que estas propriedades podem ser demonstradas matematicamente e que neste livro apresentamos apenas exemplos de verificação.

As propriedades, que veremos a seguir, podem simplificar os cálculos com números inteiros.

Propriedade comutativa

Em uma adição com números inteiros, a ordem das parcelas não altera a soma.

Exemplos

- $(-6) + (+5) = -1$ e $(+5) + (-6) = -1$
- $(-19) + (-8) = -27$ e $(-8) + (-19) = -27$

Propriedade associativa

Em uma adição de números inteiros com mais de duas parcelas, podemos associar essas parcelas de diferentes maneiras sem alterar a soma.

Exemplos

- $[(-3) + (+5)] + (+4) = (+2) + (+4) = +6$

  $(-3) + [(+5) + (+4)] = (-3) + (+9) = +6$

- $[(+31) + (-9)] + (-23) = (+22) + (-23) = -1$

  $(+31) + [(-9) + (-23)] = (+31) + (-32) = -1$

Elemento neutro

Em uma adição com duas parcelas, em que uma delas é zero, o resultado é igual à outra parcela. O zero é o elemento neutro da adição.

Exemplos

- $(+6) + 0 = 0 + (+6) = +6$
- $(-5) + 0 = 0 + (-5) = -5$

Elemento oposto

Em uma adição em que as duas parcelas são números opostos, a soma é zero.

Exemplos

- $(-7) + (+7) = 0$
- $(+26) + (-26) = 0$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule.

a) $(+5) + (+3)$ +8
b) $(-7) + (-10)$ −17
c) $0 + (-8)$ −8
d) $(+5) + (-20)$ −15
e) $(-40) + (+13)$ −27
f) $(-8) + (-17)$ −25
g) $(+35) + (-42)$ −7
h) $(-15) + (+74)$ +59

2 Uma pessoa tem saldo positivo de R$ 600,00 em sua conta bancária. A seguir, ela retira R$ 1000,00. O saldo passa a ser positivo ou negativo? Qual é o novo saldo de sua conta?
negativo; −R$ 400,00

3 Um avião voa a uma altitude de 8000 m. Se ele subir 3000 m e, em seguida, descer 4500 m, qual será sua altitude após a descida? 6500 m

CORTESIA EMBRAER S.A.

4 Nas quatro primeiras semanas de fevereiro, a empresa Gama apresentou o demonstrativo ao lado.

1ª semana	Lucro	R$ 5680,00
2ª semana	Prejuízo	R$ 1329,00
3ª semana	Lucro	R$ 2400,00
4ª semana	Prejuízo	R$ 4260,00

Pergunta-se:

a) Qual foi o saldo final da empresa no período considerado? R$ 2491,00

b) Devemos representar o saldo por um número positivo ou negativo? positivo

5 Identifique as propriedades utilizadas em cada caso.

a) $(+35) + 0 = 0 + (+35) = +35$ elemento neutro
b) $(+8) + (-9) = (-9) + (+8)$ comutativa
c) $(+6) + (-6) = 0$ elemento oposto
d) $[(-3) + (-8)] + (+2) = (-3) + [(-8) + (+2)]$ associativa

6 Observe como Rita, Maísa e Ilda calcularam o valor da expressão:

$(-14) + (-8) + (-43) + 0 + 22 + 8 + 43 + 14$

Cálculo de Rita

$(-14) + (-8) + (-43) + 0 + 22 + 8 + 43 + 14 =$
$= (-22) + (-43) + 0 + 22 + 8 + 43 + 14 =$
$= (-65) + 0 + 22 + 8 + 43 + 14 =$
$= (-65) + 22 + 8 + 43 + 14 =$
$= (-43) + 8 + 43 + 14 =$
$= (-35) + 43 + 14 =$
$= 8 + 14 = 22$

Cálculo de Maísa

$(-14) + (-8) + (-43) + 0 + 22 + 8 + 43 + 14 =$
$= (-65) + 0 + 87 =$
$= (-65) + 87 = 22$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

Cálculo de Ilda

$(-14) + (-8) + (-43) + 0 + 22 + 8 + 43 + 14 =$

$= 0 + 0 + 0 + 0 + 22 = 22$

a) Alguma delas errou o cálculo? não

b) Qual delas fez um procedimento mais prático? Por quê? Espera-se que os alunos respondam que foi Ilda, porque aplicou a propriedade do elemento oposto.

c) Use um dos procedimentos anteriores para calcular:

$(-18) + 101 + 9 + (-101) + (-38) + 22 + 18 + 38$ 31

7 Subtração de números inteiros

Veja a tabela com a classificação final de quatro times que disputaram o Campeonato Brasileiro de Futebol da série A em 2014:

Classificação	Time	Gols pró	Gols contra	Saldo de gols
8	Atlético-PR	43	42	1
9	Santos	42	35	7
10	Flamengo	46	47	−1
11	Sport	36	46	−10

Dados obtidos em: <http://www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a/classificacao/2014#.VT5oAdJViko>. Acesso em: 27 abr. 2015.

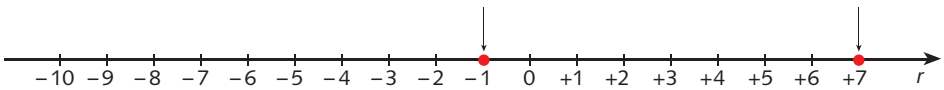
Vamos comparar o saldo de gols entre Santos e Flamengo, Sport e Atlético-PR e Flamengo e Sport. Observe:

- **Santos e Flamengo**

saldo de gols do Santos: $+7$

saldo de gols do Flamengo: -1

Localizando os números $+7$ e -1 na reta numérica, temos:



LUIZ RUBIO

Qual foi a diferença entre o saldo de gols do Santos e o do Flamengo?

A diferença entre o saldo de gols do Santos e o do Flamengo pode ser assim calculada:

$(+7) - (-1)$

Observe que $-(-1)$ é o simétrico do número -1, ou seja, é igual a $+1$.

Assim:

$(+7) - (-1) = (+7) + (+1) = +8$ (Escrevemos a subtração na forma de adição)

Portanto, a diferença entre o saldo de gols do Santos e o do Flamengo foi de 8 gols, ou seja, no saldo de gols, o Santos fez 8 gols a mais que o Flamengo.

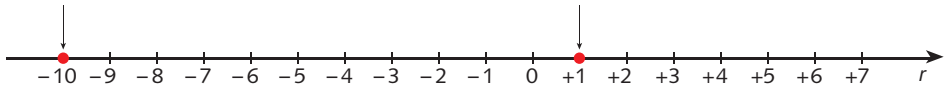
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- **Sport e Atlético-PR**

saldo de gols do Sport: -10

saldo de gols do Atlético-PR: $+1$

Localizando os números -10 e $+1$ na reta numérica, temos:



LUIZ RUBIO

Quantos gols faltavam para o Sport alcançar o saldo de gols do Atlético-PR?

A diferença entre o saldo de gols do Sport e o do Atlético-PR pode ser assim calculada:

$(-10) - (+1)$

Observe que $-(+1)$ é o simétrico do número $+1$, ou seja, é igual a -1.

Assim:

$(-10) - (+1) = (-10) + (-1) = -11$ (Escrevemos a subtração na forma de adição)

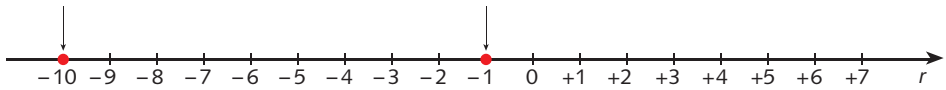
Portanto, a diferença entre o saldo de gols do Sport e o do Atlético-PR foi de -11, ou seja, faltavam 11 gols para o Sport alcançar o saldo de gols do Atlético-PR.

- **Flamengo e Sport**

saldo de gols do Flamengo: -1

saldo de gols do Sport: -10

Localizando os números -1 e -10 na reta numérica, temos:



LUIZ RUBIO

Qual foi a diferença entre o saldo de gols do Flamengo e o do Sport?

A diferença entre o saldo de gols do Flamengo e o do Sport pode ser assim calculada:

$(-1) - (-10)$

Observe que $-(-10)$ é o simétrico do número -10, ou seja, é igual a $+10$.

Assim:

$(-1) - (-10) = (-1) + (+10) = +9$ (Escrevemos a subtração na forma de adição)

Portanto, a diferença entre o saldo de gols do Flamengo e o do Sport foi de 9 gols, ou seja, no saldo de gols, o Flamengo fez 9 gols a mais que o Sport.

Observações

Podemos eliminar os parênteses para facilitar o registro e o cálculo de adições e subtrações com números inteiros. Veja como:

1 Quando, antes dos parênteses, o sinal for "+" (que pode não estar explícito, ou seja, pode não aparecer), mantemos os sinais dos números que estão no interior dos parênteses. Observe os exemplos:

$+(+6) = +6 = 6$ $+(-15) = -15$ $(-28) = -28$ $(+10) = +10 = 10$

2 Quando o sinal que antecede os parênteses for "−", trocamos os sinais dos números que estão no interior dos parênteses. Observe os exemplos:

$-(+7) = -7$ $-(-5) = +5 = 5$ $-(6) = -6$ $-(-8) = +8 = 8$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 O registro e o cálculo das adições e subtrações com números inteiros que você aprendeu até agora podem ser simplificados quando eliminamos os parênteses. Veja os exemplos:

- $(+3) + (+4) = +7$ ou $3 + 4 = 7$
- $(+5) + (-2) = +3$ ou $5 - 2 = 3$
- $(-7) + (+4) = -3$ ou $-7 + 4 = -3$
- $(-3) + (-10) = -13$ ou $-3 - 13 = -13$
- $(+8) - (+4) = (+8) + (-4) = +4$ ou $8 - 4 = 4$
- $(-9) - (-5) = (-9) + (+5) = -4$ ou $-9 + 5 = -4$
- $(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = 8$ ou $+5 + 3 = 8$
- $(-6) - (+4) = (-6) + (-4) = -10$ ou $-6 - 4 = -10$

Expressões numéricas com adições e subtrações

Observe duas formas de calcular o valor da expressão $(-8) + (+10) - (-3) + (-4)$

- Escrevemos as subtrações na forma de adição e calculamos as adições na ordem em que aparecem.

$$
\begin{aligned}
&(-8) + (+10) - (-3) + (-4) = \\
&= (-8) + (+10) + (+3) + (-4) = \\
&= (+2) + (+3) + (-4) = \\
&= (+5) + (-4) = \\
&= (+1) = 1
\end{aligned}
$$

- Eliminamos os parênteses antes de calcularmos. Veja dois modos de calcular.

$$
\begin{aligned}
&(-8) + (+10) - (-3) + (-4) = \\
&= -8 + 10 + 3 - 4 = \\
&= +2 + 3 - 4 = \\
&= +5 - 4 = \\
&= +1 = 1
\end{aligned}
$$

Nesse cálculo as operações foram feitas na ordem em que apareceram.

ou

$$
\begin{aligned}
&(-8) + (+10) - (-3) + (-4) = \\
&= -8 + 10 + 3 - 4 = \\
&= -8 - 4 + 10 + 3 = \\
&= -12 + 13 = \\
&= +1 = 1
\end{aligned}
$$

Nesse caso, agrupamos os números positivos e os números negativos antes de efetuar as operações.

Agora, veja exemplos das expressões com os sinais de associação, que devem ser eliminados nesta ordem: parênteses, colchetes e chaves.

Exemplos

- $26 - [16 - (-5 - 7)] =$
  $= 26 - [16 - (-\mathbf{12})] =$
  $= 26 - [16 + 12] =$
  $= 26 - \mathbf{28} =$
  $= -2$

Diga aos alunos que o procedimento para eliminar colchetes ou chaves é o mesmo que para parênteses.

- $20 + \{-5 - [4 - (2 - 7)] - 10\} =$
  $= 20 + \{-5 - [4 - (-\mathbf{5})] - 10\} =$
  $= 20 + \{-5 - [4 + 5] - 10\} =$
  $= 20 + \{-5 - \mathbf{9} - 10\} =$
  $= 20 - \mathbf{24} =$
  $= -4$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue.

a) $(-8) - (+7)$ -15
b) $(-5) - (+13)$ -18
c) $(-30) - (+70)$ -100
d) $(-72) - (+30)$ -102
e) $(-3) - (+7)$ -10
f) $(+10) - (+30)$ -20
g) $(+80) - (-15)$ $+95$
h) $(-37) - (+20)$ -57

2 Calcule.

a) $(-650) - (+300)$ -950
b) $(-850) - (-850)$ 0
c) $(-2100) - (+480)$ -2580
d) $(+1300) - (-1100)$ $+2400$

3 Calcule.

a) $(+8) + (-7) + (-3)$ -2
b) $(+2) - (+5) - (+3)$ -6
c) $(-3) + (-6) - (+10)$ -19
d) $(+10) - (-20) - (+30)$ 0
e) $(-4) - (-8) - (-5)$ $+9$

4 Calcule o valor das expressões.

a) $-76 - (7 - 18) + [70 - (49 - 81)]$ $+37$
b) $-(-2) - 7 - [-18 + 4 + (7 - 15)]$ $+17$
c) $-\{20 - (2 - 10) + [-30 - (-70)]\}$ -68
d) $\{[(73 - 64) + 20] - (40 - 31)\} + (-3)$ $+17$

5 Determine o valor de cada ■.

a) ■ $+ (-8) - (-3) = +7$ $+12$
b) $(+8) - (-$■$) + (-3) = -5$ -10
c) $(+48) - (-36) + (-40) - (+$■$) = -75$ $+119$

6 A temperatura em uma cidade pela manhã era 18 °C. À noite, ela caiu para −5 °C. Qual é a diferença, em grau, entre as temperaturas registradas nesses dois momentos? 23 °C

GEORGE TUTUMI

7 Podemos obter o saldo da balança comercial de um país, em determinado ano, calculando a diferença entre a quantia recebida com as exportações e a quantia gasta com as importações. Suponha que o Brasil, em determinado ano, tenha recebido 160 bilhões de dólares com as exportações e tenha gastado 120 bilhões de dólares com as importações. De quanto foi o saldo do Brasil?
40 bilhões de dólares (saldo positivo)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8 Multiplicação de números inteiros

Sabemos que $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Observe alguns exemplos de multiplicação com números inteiros, em que o primeiro número é positivo.

- $(+4) \cdot (+3) = 4 \cdot (+3) = (+3) + (+3) + (+3) + (+3) = +12$
- $(+3) \cdot (-2) = 3 \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$

Agora, observe alguns exemplos em que o primeiro número é negativo.

- $(-4) \cdot (+3) = -(+4) \cdot (+3) = -[4 \cdot (+3)] = -[(+3) + (+3) + (+3) + (+3)] = -[+12] = -12$
- $(-3) \cdot (-2) = -(+3) \cdot (-2) = -[3 \cdot (-2)] = -[(-2) + (-2) + (-2)] = -[-6] = +6$

De uma forma geral, podemos descrever a multiplicação com números inteiros em dois casos:

Em multiplicações de dois números inteiros de mesmo sinal, o resultado é um número positivo.

Exemplos

- $(+4)\cdot(+5) = +20$
- $(-6)\cdot(-7) = +42$

Em multiplicações de dois números inteiros de sinais diferentes, o resultado é um número negativo.

Exemplos

- $(+9)\cdot(-5) = -45$
- $(-6)\cdot(+7) = -42$

GEORGE TUTUMI

Os alunos devem perceber que se um dos fatores for zero, o resultado é zero.

Observe outros exemplos:

$(-4)\cdot(+6) = -4\cdot 6 = -24$

$(+3)\cdot(-5)\cdot(-6) = [3\cdot(-5)]\cdot(-6) = (-15)\cdot(-6) = +90$

Observação

Agora podemos estender o conceito de múltiplo de um número para o conjunto dos números inteiros: os múltiplos de um número inteiro são dados pelo produto desse número por qualquer número inteiro.

Exemplo

Os múltiplos inteiros de -7 são: ..., -28, -21, -14, -7, 0, $+7$, $+14$, $+21$, ...

Propriedades da multiplicação de números inteiros

As propriedades, que veremos a seguir, podem simplificar os cálculos com números inteiros.

Propriedade comutativa

Em uma multiplicação de dois ou mais números inteiros, a ordem dos fatores não altera o produto.

Exemplos

- $(+4)\cdot(-5) = -20$
  $(-5)\cdot(+4) = -20$
- $(-11)\cdot(-3) = +33$
  $(-3)\cdot(-11) = +33$

Propriedade associativa

Em uma multiplicação de três ou mais números inteiros, podemos associar esses números de maneiras diferentes sem alterar o produto.

Exemplos

- $[(-4)\cdot(+3)]\cdot(-5) = (\mathbf{-12})\cdot(-5) = +60$
  $(-4)\cdot[(+3)\cdot(-5)] = (-4)\cdot(\mathbf{-15}) = +60$
- $[(+7)\cdot(-7)]\cdot(+3) = (-49)\cdot(+3) = -147$
  $(+7)\cdot[(-7)\cdot(+3)] = (+7)\cdot(-21) = -147$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Elemento neutro

Em uma multiplicação de dois números inteiros em que um deles é igual a 1, o resultado é igual ao outro número inteiro.

O número +1 é o elemento neutro da multiplicação.

Exemplos

- $(+8)\cdot(+1) = (+1)\cdot(+8) = +8$
- $(+1)\cdot(-62) = (-62)\cdot(+1) = -62$

Propriedade distributiva

O produto da multiplicação de um número inteiro pela soma ou pela diferença de outros números pode ser obtido multiplicando o primeiro número por cada uma das parcelas e adicionando ou subtraindo os resultados obtidos.

Exemplos

- $(+4)\cdot[(-3)+(+2)] = (+4)\cdot(-3) + (+4)\cdot(+2) = (-12) + (+8) = -4$
- $(-5)\cdot[(-2)-(+4)] = (-5)\cdot(-2) - (-5)\cdot(+4) = (+10) - (-20) = +10 + 20 = 30$

Observação

Peça aos alunos que façam estas multiplicações sem aplicar a propriedade distributiva para verificarem os resultados. Nesse caso, eles devem calcular primeiro as operações do colchete e depois as multiplicações.

A propriedade distributiva pode ser empregada para o cálculo mental de um produto. Exemplo:

$$(-4)\cdot(+312) = (-4)\cdot(300+10+2) =$$
$$= (-4)\cdot(+300) + (-4)\cdot(+10) + (-4)\cdot(+2) =$$
$$= (-1200) + (-40) + (-8) = -1248$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule os produtos.

a) $(+11)\cdot(+3)$ +33
b) $(-1)\cdot(-5)$ +5
c) $(+9)\cdot(-7)$ −63
d) $0\cdot(-10)$ 0
e) $(-11)\cdot(+7)$ −77
f) $(-12)\cdot(+23)$ −276
g) $(-16)\cdot(-6)$ +96
h) $(-20)\cdot(+15)$ −300

2 Para cada item, obtenha mentalmente o sinal do resultado e escreva-o no caderno. Em seguida, calcule os produtos.

a) $(-7)\cdot(-8)\cdot(+3)$ +168
b) $(-4)\cdot(+2)\cdot(-11)$ +88
c) $(+7)\cdot(+2)\cdot(+3)\cdot(-1)$ −42
d) $(+4)\cdot(-7)\cdot(+9)\cdot(-11)$ +2772
e) $(+8)\cdot(-6)\cdot(-5)\cdot(+3)\cdot(+2)$ +1440
f) $(-5)\cdot(-6)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)$ −180

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Não, porque, ao multiplicar um número por (−1) por qualquer número inteiro não nulo, o produto será o oposto desse número.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Calcule o produto dos quatro maiores números inteiros negativos. +24

4 Podemos afirmar que o elemento neutro da multiplicação dos números inteiros é o −1? Justifique sua resposta.

5 Calcule o produto da soma dos números −9, +6, −2, +8 e −15 pelo simétrico da diferença entre −6 e −3. −36

6 Escreva, no caderno, os múltiplos de 8 compreendidos entre −20 e 20.
−16, −8, 0, 8, 16

7 Indique a propriedade aplicada.

a) $2 \cdot [(+19) \cdot (-4)] = [2 \cdot (+19)] \cdot (-4)$ associativa

b) $(-2) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-2)$ comutativa

c) $(-7) \cdot (+1) = (+1) \cdot (-7) = -7$ elemento neutro

d) $-5 \cdot (4 + 2) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot 2$ distributiva

8 Aplique a propriedade distributiva para calcular o resultado de cada item.

a) $(-3) \cdot (-20 + 7)$ 39 c) $2 \cdot (-7 + 5)$ −4

b) $(25 - 18) \cdot (-5)$ −35 d) $(8 - 3) \cdot (-4)$ −20

9 Existem 12 multiplicações de números inteiros que têm como produto 12. Uma delas é 3 · 4; outra é 4 · 3. Quais são as demais?

10 Aplique a propriedade distributiva para calcular mentalmente o produto de:
$(-7) \cdot 421$. 2947

11 Calcule o valor de cada expressão numérica, sabendo que as multiplicações devem ser feitas antes das adições e subtrações.
−30

a) $-30 - 5 \cdot [(-1) \cdot (15 - 3 \cdot 6) + 9 - 3 \cdot 4]$

b) $-5 + [(-20) \cdot (-15 + 30) \cdot (-1)]$ +295

c) $18 + 4 \cdot [-6 - 4 \cdot (-5 + 6)]$ −22

9. $1 \cdot 12 = 12$ $2 \cdot 6 = 12$ $-1 \cdot (-12) = 12$ $-2 \cdot (-6) = 12$ $-3 \cdot (-4) = 12$
$12 \cdot 1 = 12$ $6 \cdot 2 = 12$ $-12 \cdot (-1) = 12$ $-6 \cdot (-2) = 12$ $-4 \cdot (-3) = 12$

9 Divisão exata de números inteiros

A divisão é a operação inversa da multiplicação. Em uma divisão exata, o quociente é o número que, multiplicado pelo divisor, tem como resultado o dividendo. Observe os exemplos:

- $20 : 5 = 4$, porque $4 \cdot 5 = 20$
- $7{,}2 : 2{,}4 = 3$, porque $3 \cdot 2{,}4 = 7{,}2$

Essa mesma ideia pode ser aplicada a divisões com números inteiros. Veja.

- $(+30) : (+6) = +5$, porque $(+5) \cdot (+6) = +30$
- $(+30) : (-6) = -5$, porque $(-5) \cdot (-6) = +30$
- $(-30) : (-6) = +5$, porque $(+5) \cdot (-6) = -30$
- $(-30) : (+6) = -5$, porque $(-5) \cdot (+6) = -30$

De uma forma geral, podemos observar a divisão com números inteiros em dois casos:

Em uma divisão, se o dividendo e o divisor tiverem os mesmos sinais, o quociente será um número positivo.

Exemplos

- $(-60) : (-10) = +6$
- $(+32) : (+8) = +4$

Em uma divisão, se o dividendo e o divisor tiverem os sinais contrários, o quociente será um número negativo.

Exemplos

- $(-100) : (+20) = -5$
- $(+20) : (-10) = -2$

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o resultado das operações.

a) $(+6) : (+3)$ +2

b) $(+10) : (-5)$ −2

c) $(-32) : (-4)$ +8

d) $(+15) : (-3)$ −5

e) $(-80) : (-5)$ +16

f) $(-1) : (+1)$ −1

g) $(-8) : (-4)$ +2

h) $0 : (-1)$ 0

2 Calcule.

a) $(-63) : (-21)$ +3

b) $(-100) : (+10)$ −10

c) $(+1024) : (+32)$ +32

d) $(+1296) : (-48)$ −27

3 Qual é o sinal do quociente quando o dividendo e o divisor:

a) são positivos? positivo

b) são negativos? positivo

c) têm sinais contrários? negativo

4 Calcule o valor de cada expressão. Lembre-se de que deve-se calcular o resultado das operações dos parênteses antes de dividir.

a) $(16 - 30 + 48) : (-2)$ −17

b) $(-15 + 20 + 40) : (+5)$ +9

c) $(-5 + 7 - 35) : (-11)$ +3

5 Escreva, no caderno, valor de cada ■.

a) $■ : (-5) = 8$ −40 c) $■ : (-7) = 0$ 0

b) $(-30) : ■ = -6$ 5 d) $(-20) : ■ = -1$ 20

6 Calcule o valor das expressões.

a) $-2 + \{-1 + [5 - 3 \cdot (10 + 1) : 3] - 5 \cdot 7\}$ −44

b) $-5 - [3 \cdot (7 - 5 - 3) - 22 : 11]$ 0

c) $2 - (5 \cdot 10 + 6) - 5 \cdot 20 : (-17 + 13)$ −29

d) $3 - \{30 : 5 - [-7 \cdot (5 - 2) + 3] : 6\}$ −6

7 Determine o quociente entre dois números inteiros não nulos quando esses números são:

a) iguais; 1 b) opostos. −1

10 Potenciação em que a base é um número inteiro

Sabemos, do estudo da potenciação com números naturais, que potência é um produto de fatores iguais à base.

Observe o exemplo: $\underbrace{2^{\overbrace{5}^{\text{expoente}}}}_{\text{base}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 fatores iguais a 2}} = \underbrace{32}_{\text{potência}}$

No estudo da potenciação em que a base é um número inteiro e o expoente é um número natural, vale a mesma ideia, ressaltando os cuidados que devemos ter com **os sinais**, como veremos a seguir.

Se o expoente for um número par, a potência será um número inteiro positivo.

Exemplos

- $(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = +25$
- $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se o expoente for um número ímpar, a potência terá o mesmo sinal da base.

Exemplos

- $(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +125$
- $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

Observações

1 Toda potência de expoente 1 que tem um número inteiro como base é igual à própria base. Veja os exemplos:

- $(+5)^1 = +5$
- $(-3)^1 = -3$

2 Toda potência de expoente zero que tem um número inteiro não nulo como base é igual a 1. Veja os exemplos:

- $(+5)^0 = +1$
- $(-3)^0 = +1$

3 Ao escrever uma potência com base negativa sempre utilizamos os parênteses. Veja o exemplo:

- $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

Se não colocarmos os parênteses, o expoente é aplicado somente à base. Observe:

- $-3^2 = -(3)^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Propriedades da potenciação em que a base é um número inteiro

Explique aos alunos que estas propriedades podem ser demonstradas matematicamente e que neste livro apresentamos apenas exemplos de verificação.

A seguir, vamos estudar algumas dessas propriedades para potências com expoente natural.

1ª propriedade

Para multiplicar potências de mesma base, mantemos a base e adicionamos os expoentes.

Exemplos

- $(+10)^3 \cdot (+10)^2 = [(+10) \cdot (+10) \cdot (+10)] \cdot [(+10) \cdot (+10)] = (+10)^5$
- $(-3)^2 \cdot (-3)^4 = [(-3) \cdot (-3)] \cdot [(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)] = (-3)^6$

Generalizando, se a é um número inteiro e m e n são números naturais, temos: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2ª propriedade

Para dividir potências de mesma base, diferente de zero, mantemos a base e subtraímos os expoentes.

Exemplos

- $(+10)^7 : (+10)^4 = \dfrac{(+10)\cdot(+10)\cdot(+10)\cdot\cancel{(+10)}\cdot\cancel{(+10)}\cdot\cancel{(+10)}\cdot\cancel{(+10)}}{\cancel{(+10)}\cdot\cancel{(+10)}\cdot\cancel{(+10)}\cdot\cancel{(+10)}} =$

  $= (+10)\cdot(+10)\cdot(+10) = (+10)^3$

- $(-3)^5 : (-3)^2 = \dfrac{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot\cancel{(-3)}\cdot\cancel{(-3)}}{\cancel{(-3)}\cdot\cancel{(-3)}} =$

  $= (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = (-3)^3$

Generalizando, se a é um número inteiro não nulo e m e n são números naturais, com $m \geqslant n$, temos: $a^m : a^n = a^{m-n}$

Observação

É fácil justificar por que $a^0 = 1$, com $a \neq 0$. Observe:

- $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$ (1)
- $a^m : a^m = 1$ (2), pois todo número, diferente de zero, dividido por ele mesmo dá 1 como resultado.

Comparando (1) e (2), temos: $a^0 = 1$, com $a \neq 0$

3ª propriedade

Para elevar uma potência a um expoente, mantemos a base e multiplicamos os expoentes.

Exemplos

- $[(+2)^5]^3 = (+2)^5\cdot(+2)^5\cdot(+2)^5 = (+2)^{15}$
- $[(-1)^3]^4 = (-1)^3\cdot(-1)^3\cdot(-1)^3\cdot(-1)^3 = (-1)^{12}$

Generalizando, se a é um número inteiro e m e n são números naturais, temos: $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

4ª propriedade

Para elevar um produto a um expoente, elevamos cada fator ao expoente e multiplicamos o resultado.

Exemplos

- $[(+2)\cdot(+3)]^4 = [(+2)\cdot(+3)]\cdot[(+2)\cdot(+3)]\cdot[(+2)\cdot(+3)]\cdot[(+2)\cdot(+3)] =$

  $= [(+2)\cdot(+2)\cdot(+2)\cdot(+2)]\cdot[(+3)\cdot(+3)\cdot(+3)\cdot(+3)] = (+2)^4\cdot(+3)^4$

- $[(-1)\cdot(+4)]^3 = [(-1)\cdot(+4)]\cdot[(-1)\cdot(+4)]\cdot[(-1)\cdot(+4)] =$

  $= [(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)]\cdot[(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)] = (-1)^3\cdot(+4)^3$

Generalizando, se a e b são números inteiros e m é um número natural, temos: $(a\cdot b)^m = a^m\cdot b^m$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Cuidado!

Observe no exemplo abaixo que: $[(a^m)]^n \neq a^{m^n}$

$[(+2)^2]^3 \neq (+2)^{2^3}$, pois: $[(+2)^2]^3 = (+2)^{2\cdot 3} = (+2)^6 = 64$ e $(+2)^{2^3} = (+2)^{2\cdot 2\cdot 2} = (+2)^8 = 256$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule as potências.

a) $(+2)^3$ +8
b) $(-7)^4$ +2401
c) $(-9)^3$ −729
d) $(+3)^2$ +9
e) $(-17)^0$ +1
f) $(-11)^2$ +121
g) $(-35)^1$ −35
h) $(-1)^3$ −1
i) $(+1992)^0$ 1

2 Responda às questões.

a) Quando a base é positiva, qual é o sinal da potência? positivo

b) Quando a base é negativa, qual é o sinal da potência? Positivo, se o expoente for par, e negativo, se o expoente for ímpar.

3 Aplicando as propriedades das potências, expresse o resultado por meio de uma só potência. Atenção! Você deve calcular as multiplicações e divisões de potências na ordem em que aparecem.

a) $(-6)^0 \cdot (-6)^3 \cdot (-6)^1$ $(-6)^4$
b) $(+9)^{12} : (+9)^8 \cdot (+9)^4$ $(+9)^8$
c) $(+7)^4 \cdot (+7)^6 \cdot (+7)^{10} : (+7)^{12}$ $(+7)^8$
d) $(-1)^6 \cdot (-1)^5 : (-1)^8$ $(-1)^3$
e) $[(+3)^2]^1$ $(+3)^2$
f) $[(-3)^2]^4$ $(-3)^8$

4 Calcule: $\underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{\text{30 fatores}}$ +1

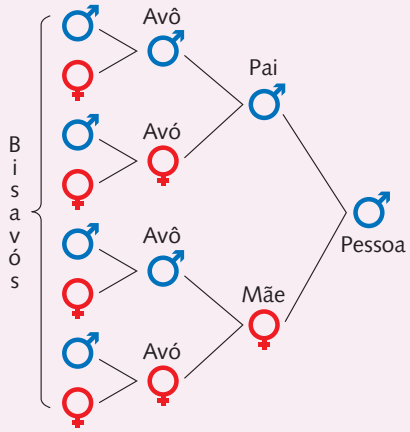
5 Determine o valor de $M + N$ em cada item.

a) $M = -(-2)^3$ e $N = (-1)^8$ 9
b) $M = -(-2)^5$ e $N = -(+2)^5$ 0

6 Identifique no caderno as sentenças verdadeiras.

a) $(-2)^0 = 1$ verdadeira
b) $(-3)^2 - (-3)^3 = -3$
c) $(-7)^5 : (-7)^5 = 1$ verdadeira
d) $(-3)^{2^4} = (-3)^8$

7 Observe o esquema abaixo.



LUIZ RUBIO

Quantos bisavós cada pessoa tem? E quantos trisavós? Dê as respostas na forma de potência. bisavós: $2^3 = 8$; trisavós: $2^4 = 16$

8 Calcule, na forma de potência, o valor de: $(9^{12} \cdot 9^6) : 9^8$ 9^{10}

9 Calcule o valor das expressões, sabendo que devemos obrigatoriamente calcular as potenciações antes das multiplicações e divisões.

a) $(-4) - [(-8) : (+2)]^2 - 6$ −26
b) $(+20) : (-1)^4 - 2^2 + (-2)^5 : (+2)^4 - 5^0$ 13
c) $(-576) : (-12)^2 - (-125) : (-5)^2$ +1

10 Com um colega, calcule:

a) $\begin{cases} (5+3)^2 & 64 \\ 5^2 + 3^2 & 34 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2-4)^3 & -8 \\ 2^3 - 4^3 & -56 \end{cases}$

Agora, responda: sendo a e b números inteiros e n um número natural maior que 1, é possível dizer que $(a+b)^n = a^n + b^n$ ou que $(a-b)^n = a^n - b^n$? não

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Caso considere conveniente, promova uma gincana com os alunos utilizando questões desse tipo.

11 Lúcio escreveu sua idade na primeira linha de uma folha de caderno. Na linha seguinte, ele escreveu uma subtração de dois números inteiros cuja diferença era sua idade. Na linha seguinte, substituiu esses dois números, respectivamente, por uma multiplicação de outros três números inteiros e por uma divisão do quadrado de um número inteiro pelo triplo de outro. Na linha seguinte, substituiu o primeiro número da linha anterior por uma subtração e o segundo por uma adição. Assim, ele obteve uma expressão numérica, sabendo antecipadamente seu valor. Veja o que ele fez:

GEORGE TUTUMI

$15 =$

$= 24 - 9 =$

$= (-2) \cdot 4 \cdot (-3) - [9^2 : (3 \cdot 3)] =$

$= (11 - 13) \cdot (-8 + 12) \cdot (-3) - [9^2 : (3 \cdot 3)]$

a) Calcule mentalmente o valor da expressão de Lúcio. 15

b) Invente duas expressões com cinco operações diferentes com números inteiros e troque-as com as de um colega, sem que ele saiba o número que você pensou, para que cada um calcule o valor das expressões do outro. Depois, destroquem as expressões para corrigi-las.

Resposta pessoal.

11 Raiz quadrada exata de números inteiros

Consideremos a seguinte pergunta:

- Que números têm por quadrado o número 25?

Para respondê-la, devemos observar que:

$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ $\qquad$ $(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = 25$

Portanto, temos duas soluções.

Embora $(-5)^2 = 25$ e $(+5)^2 = 25$, consideramos a raiz quadrada de 25 única e não negativa, ou seja, apenas o número $+5$. Assim: $\sqrt{25} = +5$ (lemos: "a raiz quadrada de 25 é igual a 5").

A operação pela qual determinamos a raiz quadrada de um número é chamada **radiciação**. Veja:

Índice da raiz — Radical

$\sqrt[2]{144} = 12$, pois $12^2 = 144$

Radicando — Raiz

O oposto do número $\sqrt{25}$ é $-\sqrt{25}$. Então: $-\sqrt{25} = -5$

Assim, quando o radical é precedido do sinal negativo, indicamos o oposto da raiz quadrada.

Exemplos

- $-\sqrt{16} = -4$
- $-\sqrt{100} = -10$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observações

1 A raiz quadrada de zero é zero: $\sqrt{0} = 0$, pois $0^2 = 0$.

2 Chamamos de **números inteiros quadrados perfeitos** aqueles que podem ser escritos como potência de base inteira e expoente 2. Os números 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 são exemplos de números inteiros quadrados perfeitos.
A raiz quadrada de um número que não é número inteiro quadrado perfeito não é um número inteiro. Por exemplo, $\sqrt{5}$ não é número inteiro, pois 5 não é um número inteiro quadrado perfeito.

3 A raiz quadrada de um número inteiro negativo não é um número inteiro, pois o quadrado de um número inteiro nunca é negativo. Logo, não existe número inteiro cujo quadrado seja, por exemplo, o número -25.
Veja que $\sqrt{-25}$ não é um número inteiro, mas $-\sqrt{25}$ é um número inteiro: $-\sqrt{25} = -5$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

12 Expressões numéricas

Nas expressões numéricas envolvendo operações com números inteiros, as operações devem ser efetuadas nesta ordem:

1º) potenciações e radiciações (na ordem em que aparecem);

2º) multiplicações e divisões (na ordem em que aparecem);

3º) adições e subtrações (na ordem em que aparecem).

Para eliminar os sinais de associação, também seguimos uma ordem: parênteses, colchetes e, por último, chaves.

Exemplos

- $\left\{(-2+8)^2 - 3 \cdot \left[\left(\sqrt{16} + \sqrt{4}\right) : 3\right]\right\} : (-5) =$
  $= \left\{(+6)^2 - 3 \cdot [(4+2) : 3]\right\} : (-5) =$
  $= \left\{+36 - 3 \cdot [6 : 3]\right\} : (-5) =$
  $= \left\{+36 - 3 \cdot 2\right\} : (-5) =$
  $= \left\{36 - 6\right\} : (-5) =$
  $= 30 : (-5) =$
  $= -6$

- $6 - \left\{\left[\left(\sqrt{25} - \sqrt{49}\right)^2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 4\right] : 2\right\} =$
  $= 6 - \left\{\left[(5-7)^2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 4\right] : 2\right\} =$
  $= 6 - \left\{\left[(-2)^2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 4\right] : 2\right\} =$
  $= 6 - \left\{\left[4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 4\right] : 2\right\} =$
  $= 6 - \left\{\left[4 \cdot 9 - 6 \cdot 4\right] : 2\right\} =$
  $= 6 - \left\{\left[36 - 24\right] : 2\right\} =$
  $= 6 - \left\{12 : 2\right\} = 6 - 6 = 0$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine:

a) $\sqrt{81}$ 9

b) $-\sqrt{900}$ −30

c) $\sqrt{64}$ 8

d) $\sqrt{0}$ 0

e) $-\sqrt{196}$ −14

f) $-\sqrt{100}$ −10

2 Calcule o valor das expressões.

a) $\sqrt{25} + \sqrt{36} + \sqrt{64}$ 19

b) $\sqrt{81} - \sqrt{100} + \sqrt{64}$ 7

c) $-\sqrt{36} - \sqrt{121} + \sqrt{64}$ −9

d) $\sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{49} + \sqrt{64}$ 25

3 Qual é o valor de cada expressão?

a) $\left\{\left[\sqrt{49} + (2^4 - 1)\right] \cdot \sqrt{64}\right\} + \sqrt{1024}$ 208

b) $-54 : \left\{\left(-2 + \sqrt{81}\right)^2 : 7 - \left[\left(-2^3 + \sqrt{4}\right) : 3\right]\right\}$ −6

4 A área de um terreno com forma quadrada é 64 m^2. Qual é a medida, em metro, do lado desse terreno? 8 m

5 Determine o valor da raiz quadrada.

$\sqrt{(-2) \cdot (+4)^2 \cdot (-8)}$ 16

6 Calcule o valor da raiz quadrada de 4^3. 8

7 Com um colega, calcule e observe a diferença entre os resultados de cada item. Depois, responda: a raiz quadrada da soma de dois números é igual à soma das raízes quadradas de cada um desses números? não

a) $\begin{cases} \sqrt{16 + 9} & 5 \\ \sqrt{16} + \sqrt{9} & 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{100 - 36} & 8 \\ \sqrt{100} - \sqrt{36} & 4 \end{cases}$

8 Junte-se a um colega, desenhem o quadro abaixo e completem-no, sabendo que o produto dos números de cada linha vertical, de cada linha horizontal e das duas diagonais é igual a 8 000.

−10	−8	100
−200	20	−2
4	−50	−40

MODELO MODELO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(Enem) Um executivo sempre viaja entre as cidades A e B, que estão localizadas em fusos horários distintos. O tempo de duração da viagem de avião entre as duas cidades é de 6 horas. Ele sempre pega um voo que sai de A às 15 h e chega à cidade B às 18 h (respectivos horários locais).

Certo dia, ao chegar à cidade B, soube que precisava estar de volta à cidade A, no máximo, até as 13 h do dia seguinte (horário local de A).

Para que o executivo chegue à cidade A no horário correto e admitindo que não haja atrasos, ele deve pegar um voo saindo da cidade B, em horário local de B, no máximo à(s)

a) 16 h b) 10 h c) 7 h d) 4 h e) 1 h

alternativa **d**

Interpretação e identificação dos dados

- Leia o enunciado da questão e verifique se o horário da cidade B está adiantado ou atrasado em relação ao da cidade A. O horário da cidade B está com 3 horas de atraso em relação ao da cidade A.
- Responda:

I. Em uma viagem rotineira, quando o avião chega em B, que horas são na cidade A? 21 h

II. Se o avião chegou às 18 horas em B, qual é a diferença de horário entre as cidades A e B? 3 horas

Plano de resolução

- Considerando as informações fornecidas pelo enunciado, elabore um esquema que represente um possível processo de resolução do problema. Resposta pessoal.

Resolução

- Junte-se a dois colegas.
- Você deverá apresentar seu plano de resolução para os colegas e eles farão o mesmo com você. Escolham uma das resoluções para apresentar à classe.
- Discutam as diferenças e as semelhanças entre os planos escolhidos e, com base na análise das estratégias, partam para a execução do processo de resolução.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Resposta pessoal. Se o executivo precisa estar às 13 horas na cidade A, os relógios em B estarão marcando 10 horas (3 horas a menos). Como o voo dura 6 horas, é preciso, então, sair às 4 horas.

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Façam uma pesquisa sobre os fusos horários. Em seguida, confeccionem um cartaz explicando o tema estudado e propondo desafios para os leitores.

O estudo dos fusos horários pode ser feito em parceria com o professor de Geografia.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Neste capítulo são abordados os números inteiros. Cite algumas situações cotidianas nas quais é possível encontrar esses números. Resposta pessoal. Alguns exemplos: temperatura, saldo de gols, fuso horário, entre outros.

2 Escreva no caderno como comparar:

- um número negativo e zero; Zero é maior que qualquer número negativo.
- um número positivo e zero; Zero é menor que qualquer número positivo.
- dois números positivos; Será maior o número positivo de maior módulo.
- dois números negativos. Será maior o número negativo de menor módulo.

3 Reescreva as frases abaixo, completando cada ▭ com a palavra ou expressão adequada, escolhida entre as possibilidades dadas.

a) Na multiplicação de números inteiros de mesmo sinal, o produto será ▭ (positivo/negativo). positivo

b) Em uma potenciação de base negativa e expoente ímpar, o resultado será ▭ (positivo/negativo). negativo

c) No conjunto dos números inteiros ▭ (existe/não existe) raiz quadrada de número negativo. Não existe.

4 Em uma expressão numérica, qual deve ser a ordem de resolução das operações?
Devem-se efetuar, inicialmente, as potenciações e as radiciações na ordem em que aparecem; depois, as multiplicações e as divisões na ordem em que aparecem; em seguida, as adições e as subtrações, também na ordem em que aparecem.

5 Reescreva as afirmações incorretas, corrigindo-as.

a) No conjunto dos números inteiros, existe o elemento neutro da multiplicação e ele é $+1$.

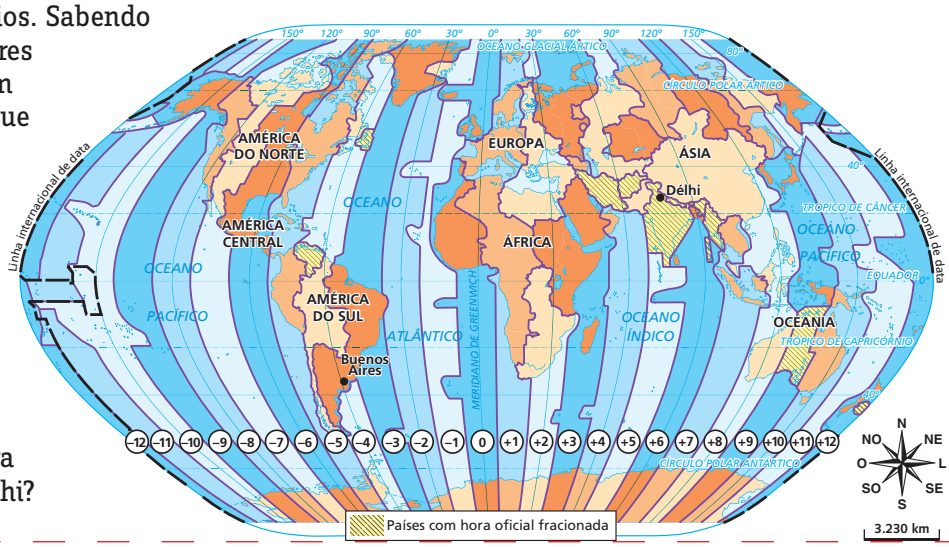
b) No conjunto dos números inteiros, existe o elemento neutro da divisão e ele é $+1$.
No conjunto dos números inteiros, não existe o elemento neutro da divisão.

c) No conjunto dos números inteiros, existe o elemento neutro da subtração e ele é -1.
No conjunto dos números inteiros, não existe o elemento neutro da subtração.

Aplicando

1 A Terra é dividida pelos meridianos em 24 fusos horários. Sabendo que em Buenos Aires os relógios marcam 3 horas a menos que em Greenwich (Meridiano Zero) e em Nova Délhi, 5 horas e 30 minutos a mais, pergunta-se:

Quando é meio-dia em Buenos Aires, qual é a hora local em Nova Délhi?
20 h 30 min



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

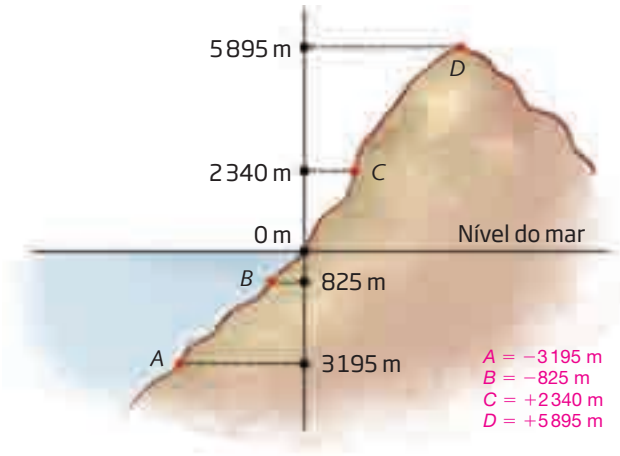
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4.

Data	Saldo (em R$)	Operação (em R$)	Saldo (em R$)
10/1	+540,00		
11/1	+340,00		+880,00
12/1	+880,00	−640,00	+240,00
13/1	+240,00	−120,00	+120,00

2 Observe a altitude dos pontos *A*, *B*, *C* e *D* em relação ao nível do mar e escreva, utilizando números inteiros, essas altitudes.



GEORGE TUTUMI

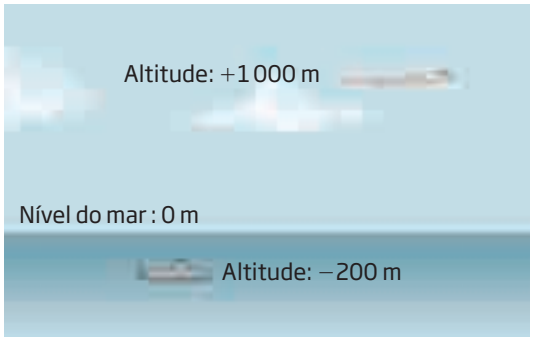
3 No quadro de comando de um elevador há botões correspondentes aos seis andares (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6), ao térreo (*T*), à cobertura (*Co*) e ao subsolo (*SS*). Trace uma reta numérica para representar de maneira ordenada esse quadro de comando.

4 No dia 10/1, o saldo da conta bancária de Karine era R$ 540,00. Nos três dias seguintes, ela efetuou estas operações:

- 11/1 ⟶ depositou R$ 340,00;
- 12/1 ⟶ sacou R$ 640,00;
- 13/1 ⟶ retirou a metade do saldo.

Qual era o saldo de Karine no dia 13/1, após a última operação? Faça uma tabela que mostre a sequência de operações ocorridas nesses três dias. R$ 120,00

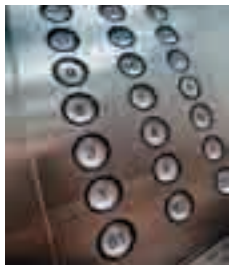
5 Observe a figura abaixo e determine, no caderno, a diferença entre as altitudes do avião e do submarino. 1 200 m



GEORGE TUTUMI

6 Suponha que um elevador esteja no andar térreo. Utilizando números inteiros, positivos ou negativos, e considerando o térreo origem, determine o andar em que o elevador estará no caso de:

a) descer três andares; −3
b) subir seis andares; +6
c) subir oito andares e descer quatro andares; +4
d) subir dois andares e descer três andares. −1



PAUL GIAMOU/GETTY IMAGES

Painel de elevador.

7 Responda às questões no caderno.

a) A temperatura de um termômetro que está marcando −5 °C, deve subir quantos graus Celsius para atingir +22 °C? 27 °C
b) Qual é o número inteiro sucessor de −9? −8
c) Qual é o número inteiro antecessor de −15? −16
d) Qual é o maior número inteiro não positivo? zero
e) Quais são os três primeiros números inteiros maiores que −7? −6, −5, −4
f) Qual é o maior número inteiro negativo? −1
g) Qual é o menor número inteiro positivo? +1

8 Uma equipe de Fórmula 1 avisa seu piloto, que está em segundo lugar na prova, que ele está 8 segundos à frente do terceiro colocado e 12 segundos atrás do primeiro colocado. Quantos segundos à frente do terceiro colocado está o líder da prova? 20 segundos

GEORGE TUTUMI

3. ⟵ SS T P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 Co ⟶ LUIZ RUBIO

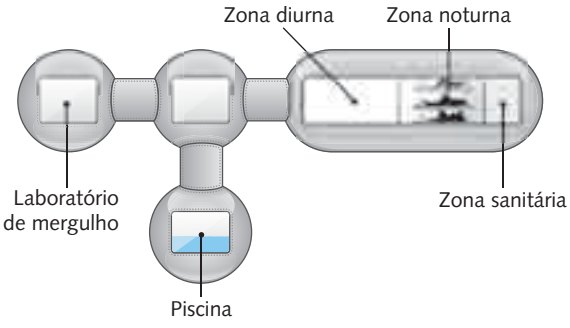
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9 No caderno, copie o quadro, substituindo corretamente cada ▭.

x	7	−13	−21	−10
y	−9	29	44	20
z	−4	48	−33	47
$x + y - z$	2	−32	56	−37
$x - z$	11	−61	12	57
$x - z + y$	2	−32	56	−37

10 Alexandre Magno, um dos principais conquistadores da história, nasceu em 356 a.C. e morreu em 323 a.C. Quantos anos ele tinha quando morreu? 33 anos

11 Em Marselha, na França, no laboratório da Companhia Marítima de Especialistas, três mergulhadores franceses bateram o recorde mundial de profundidade em mergulho simulado.



Partindo da pressão de 26 atmosferas (unidade de medida de pressão), foi efetuado o seguinte procedimento:

1ª etapa: elevou-se a pressão inicial de 20 atmosferas e, depois, retirou-se a metade desse acréscimo;

2ª etapa: elevou-se a pressão atingida na primeira etapa mais 30 atmosferas e, depois, retirou-se a metade desse acréscimo;

3ª etapa: elevou-se a pressão atingida na segunda etapa mais 40 atmosferas e, depois, retirou-se a metade desse acréscimo.

Escreva no caderno, na forma de adição e subtração de números inteiros, todo o procedimento e forneça a pressão final atingida.

(26 + 20 − 10 + 30 − 15 + 40 − 20); 71 atmosferas

12 No caderno, complete o quadrado mágico abaixo, substituindo cada ▭, de modo que todas as linhas, colunas e diagonais tenham a mesma soma.

−4	10	0
6	2	−2
4	−6	8

13 O monte Branco tem altura de 4 807 m; o Everest, de 8 848 m; o Aconcágua, de 6 962 m; e a torre Eiffel, de 324 m. A depressão de Tuscarora, no oceano Pacífico, está a 8 513 m de profundidade, e o oceano Índico, em seu ponto mais profundo, atinge a marca de 7 725 m. Represente sobre uma reta vertical essas diferentes informações.

(Sugestão: para cada 1 000 m, utilize 1 cm.)

Monte Everest, na cordilheira do Himalaia. Com 8 848 m, esse é o ponto mais alto do planeta.

14 Em seu caderno, reescreva as igualdades abaixo substituindo cada ■ por um número inteiro.

a) ■ · (+4) = (−8) · (−9) +18

b) ■ · [(+8) − (+7)] = −5 −5

c) 5 · (■ − 7) = −40 −1

15 Calcule os quocientes.

a) (+160) : (−1) −160

b) (−1 100) : (−50) +22

c) (−144) : (+12) −12

d) (−625) : (−25) +25

13.

GUILHERME CASAGRANDI

FOTO: GALYNA ANDRUSHKO/SHUTTERSTOCK
MAPA: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

16 Calcule o valor das expressões.

a) $-\{+15 - [(-4 + 20) - 20] - 17\}$ -2

b) $3 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-6) \cdot (-2) + + (-4) \cdot (-7)$ -44

c) $2 + \{5 \cdot [(6 - 4 : 2)^2 - 15]^4 - 3\}^3$ 10

d) $(7 - 6)^3 - [4 - (5^2 - 2^2) \cdot 7]$ 144

e) $\{[5^3 - 2^4 : 8 - (2 - 7 - 4 : 2)] - 1^8\}$ 129

17 O quadro abaixo mostra a temperatura média, em dois meses do ano, de quatro cidades. Copie o quadro no caderno, substituindo cada ▬ pelo módulo da diferença entre as temperaturas registradas nos dois meses.

	Paris (França)	Montreal (Canadá)	Sidney (Austrália)	Moscou (Rússia)
Janeiro	3 °C	−7 °C	18 °C	−5 °C
Julho	19 °C	18 °C	4 °C	14 °C
Diferença	▬ +16 °C	▬ +25 °C	▬ +14 °C	▬ +19 °C

18 Toni pensou em um número inteiro, multiplicou-o por 4 e somou-o ao seu triplo, obtendo -84. Qual é o sucessor do número pensado? -11

19 Sabemos que:

- $K = \sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$
- $W = \dfrac{(2^{10} : 2^6) \cdot 2^2}{64}$

Determine o valor numérico de:

a) $K + W$ 11 b) $K \cdot W$ 10 c) K^W 10

20 Sofia e Virgínia estão jogando com dois dados: um vermelho e outro amarelo. Cada uma delas iniciou o jogo com 20 pontos e, a cada jogada, adiciona os pontos obtidos no dado amarelo e subtrai os pontos obtidos no dado vermelho. A figura abaixo representa o primeiro lance de Sofia.

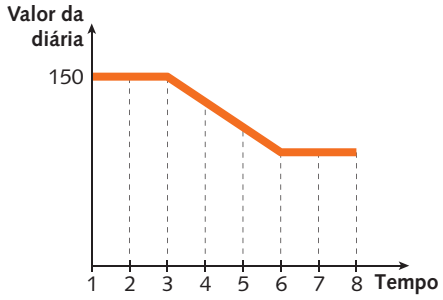
PHOTODISC/GETTY IMAGES

a) Com quantos pontos ficou Sofia após esse lance? 18

b) Virgínia, após seu primeiro lance, acumulou 24 pontos. Indique duas formas pelas quais ela pode ter obtido essa pontuação. dados amarelo e vermelho com 6 e 2 ou 5 e 1 pontos, respectivamente

c) Partindo de 20 pontos, após três lances, qual é o máximo de pontos que Sofia ou Virgínia podem obter? 35

21 **(Enem)** Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de:

a) R$ 90,00 c) R$ 130,00 e) R$ 170,00

b) R$ 110,00 d) R$ 150,00 alternativa **a**

22 **(OBM)** Na expressão $\dfrac{M \times A \times T \times E \times M}{A \times T \times I \times C \times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão? alternativa **c**

a) 28 c) 108 e) 648

b) 96 d) 576

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

GUILHERME CASAGRANDI

CAPÍTULO 2

NÚMEROS RACIONAIS

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Gramado é um município do estado do Rio Grande do Sul. Localiza-se na serra gaúcha, a 115 quilômetros de Porto Alegre, a uma altitude de 830 metros. Tem uma área de 237,827 quilômetros quadrados e uma população de aproximadamente 34 000 habitantes, dos quais $\frac{9}{10}$ vive na área urbana. Seu clima é subtropical, com temperatura amena no verão, em torno de 22 °C; no inverno, já chegou a atingir -5 °C. Anualmente, a cidade recebe milhões de turistas; a maior parte de sua receita é proveniente do turismo e seu Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é muito alto: 0,841.

- Quais dos números que aparecem no texto acima podem ser classificados como inteiros?
  115, 830, 34 000, 22 e -5
- Todos os números do texto puderam ser classificados?
  Não; os números 237,827, $\frac{9}{10}$ e 0,841 não puderam ser classificados como inteiros.

G. EVANGELISTA/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

Neste capítulo, trabalharemos com os números racionais. Trataremos das principais operações que envolvem esses números e suas aplicações na resolução de problemas. É importante, no decorrer do capítulo, deixar bem clara para os alunos a diferença entre números racionais não inteiros e números inteiros.

Pórtico de Gramado (RS), em março de 2012. Inaugurado em junho de 1991, o pórtico em estilo normando é uma homenagem à colonização alemã.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe as situações a seguir e responda às perguntas.

GEORGE TUTUMI

- Qual é a temperatura do *freezer*? $-1{,}5\ °C$

Na jarra de 1 litro da figura abaixo, a régua graduada está dividida em 4 partes iguais.

- A jarra de 1 litro estava cheia e parte do seu conteúdo foi despejado no copo. Agora, quanto suco há na jarra? E no copo? $\frac{3}{4}$ de litro; $\frac{1}{4}$ de litro

Os números apresentados nessas situações não podem ser classificados em naturais ou em inteiros. São **números racionais**.

Neste capítulo, vamos estudar os números racionais e suas operações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Números racionais

Em uma loja, foram vendidos, em uma semana, $\frac{3}{4}$ das unidades de um modelo de refrigerador que havia no estoque. Veja algumas das especificações desse refrigerador:

Especificações do refrigerador	
Altura	1,79 m
Largura	0,60 m
Profundidade	0,76 m
Capacidade do refrigerador	293 ℓ
Capacidade do *freezer*	95 ℓ
Temperatura mínima do *freezer*	−15 °C
Temperatura máxima do *freezer*	−20 °C

Dados fornecidos pelo fabricante da geladeira.

AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK

No texto e na tabela acima, podemos observar a presença de alguns números. Os números 95, −15, −20 e 293 pertencem ao conjunto dos números inteiros.

Os números $\frac{3}{4}$, 1,79; 0,60 e 0,76 não são números inteiros. Temos um número na forma de fração, $\frac{3}{4}$, e três números que podem ser escritos na forma de fração:

$$1{,}79 = \frac{179}{100} \qquad 0{,}60 = \frac{60}{100} \qquad 0{,}76 = \frac{76}{100}$$

Os números que podem ser representados por uma fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$, são chamados de **números racionais**.

Então, $\frac{3}{4}$; 1,79; 0,60 e 0,76 são números racionais.

Os números 95, −15, −20 e 293 também podem ser escritos na forma de fração:

$$95 = \frac{95}{1} \qquad -15 = -\frac{15}{1} \qquad -20 = -\frac{20}{1} \qquad 293 = \frac{293}{1}$$

Então, os números 95, −15, −20 e 293 também são números racionais.

Veja mais exemplos de números racionais.

- $-\frac{3}{7}$
- $\frac{1}{2}$
- −0,2
- 4,32

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observações

1 Todo número inteiro é um número racional. Veja os exemplos:

- $-3 = -\frac{3}{1}$
- $+7 = +\frac{7}{1}$
- $0 = \frac{0}{1}$

2 Os números que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero, formam o conjunto dos números racionais. Tal conjunto é representado pela letra $\mathbb{Q}$, derivada da palavra **quociente**.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{ sendo } a \text{ e } b \text{ números inteiros e } b \neq 0\right\}$$

3 Existem infinitos números que não são racionais, pois não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Escritos na forma decimal, eles têm infinitas casas sem ser dízimas periódicas. Veja alguns exemplos:

- $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$
- $\sqrt{3} = 1{,}732050808...$
- $\pi = 3{,}141592654...$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Reescreva as afirmações verdadeiras.

a) $-0{,}3$ é um número racional.

b) -17 é um número natural.

c) $-\frac{2}{5}$ é um número inteiro.

d) $-\frac{3}{5}$ é um número racional.

e) Zero é um número racional.

f) $-\frac{1}{2}$ é um número inteiro.

g) $+0{,}01$ é um número racional.

h) $-0{,}7$ é um número natural.

alternativas verdadeiras: **a**, **d**, **e** e **g**

2 Escreva no caderno os números racionais abaixo na forma decimal.

a) $-\frac{1}{4}$ $-0{,}25$

b) $\frac{70}{50}$ $1{,}4$

c) $\frac{7}{100}$ $0{,}07$

d) $\frac{3}{5}$ $0{,}6$

e) $-\frac{1}{8}$ $-0{,}125$

f) $-\frac{5}{8}$ $-0{,}625$

g) $\frac{27}{200}$ $0{,}135$

h) $-\frac{36}{20}$ $-1{,}8$

3 Escreva no caderno os números racionais na forma de fração. Exemplos de respostas:

a) $+6{,}4$ $+\frac{64}{10} = +\frac{32}{5}$

b) $-2{,}25$ $-\frac{225}{100} = -\frac{9}{4}$

c) $-0{,}08$ $-\frac{8}{100} = -\frac{2}{25}$

d) $+0{,}54$ $+\frac{54}{100} = +\frac{27}{50}$

Nesta atividade, os alunos podem dar como resposta qualquer fração equivalente às que apresentamos.

4 Responda às questões.

a) Quantos números naturais existem entre 4 e 12? 7

b) Quantos números racionais existem entre 1 e 2? infinitos

c) O número racional $\frac{13}{4}$ está situado entre quais números naturais? entre 3 e 4

d) O número racional $-\frac{11}{2}$ está situado entre quais números inteiros? entre -6 e -5

5 Escreva a forma irredutível dos números racionais.

a) $\frac{15}{35}$ $\frac{3}{7}$

b) $-\frac{16}{80}$ $-\frac{1}{5}$

c) $-\frac{32}{64}$ $-\frac{1}{2}$

d) $\frac{20}{25}$ $\frac{4}{5}$

e) $\frac{35}{15}$ $\frac{7}{3}$

f) $-\frac{80}{16}$ -5

g) $-\frac{64}{32}$ -2

h) $\frac{25}{20}$ $\frac{5}{4}$

6 Escreva os números na forma de fração irredutível.

a) $0{,}8$ $\frac{4}{5}$

b) $-1{,}5$ $-\frac{3}{2}$

c) $8{,}5$ $\frac{17}{2}$

d) $-1{,}4$ $-\frac{7}{5}$

e) $+6{,}84$ $\frac{171}{25}$

f) $-3{,}45$ $-\frac{69}{20}$

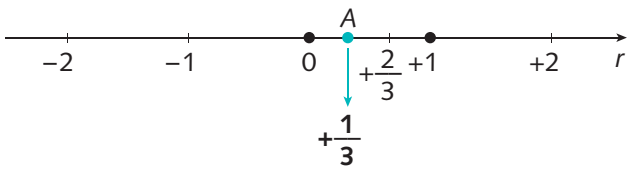
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Representação dos números racionais na reta numérica

Podemos estabelecer uma correspondência entre os números racionais e pontos na reta numérica.

Observe alguns exemplos.

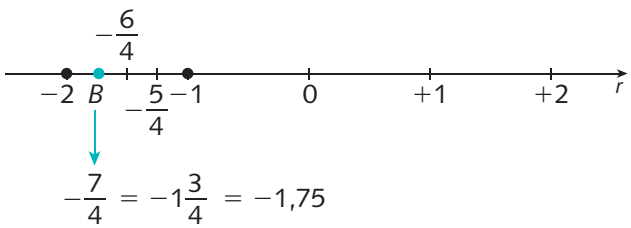
- O ponto que corresponde ao número racional $+\frac{1}{3}$, por exemplo, está localizado entre os pontos correspondentes aos números inteiros 0 e $+1$. Podemos dividir o segmento entre 0 e 1 em três partes iguais e marcar o ponto *A*, conforme mostramos abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Repare que o ponto *A* corresponde ao número racional $+\frac{1}{3}$.

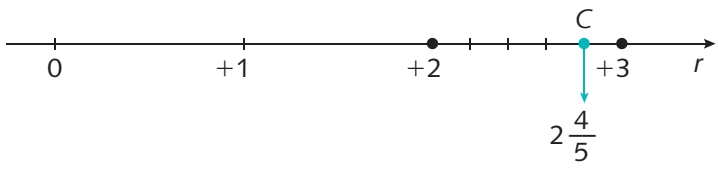
- O ponto que corresponde ao número racional $-\frac{7}{4}$, que equivale a $-1\frac{3}{4}$, está localizado entre os pontos correspondentes aos números inteiros -2 e -1. Podemos dividir o segmento entre -2 e -1 em quatro partes iguais e marcar o ponto *B*, conforme mostramos abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Repare que o ponto *B* corresponde ao número racional $-\frac{7}{4}$.

- O ponto que corresponde ao número $\frac{14}{5}$, que equivale a $2\frac{4}{5}$, está localizado entre os pontos correspondentes aos números $+2$ e $+3$. Podemos dividir o segmento entre 2 e 3 em cinco partes iguais e marcar o ponto *C*, conforme mostramos abaixo.

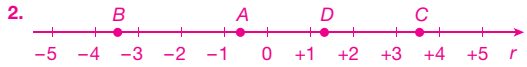


LUIZ RUBIO

Repare que o ponto *C* corresponde ao número racional $\frac{14}{5}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

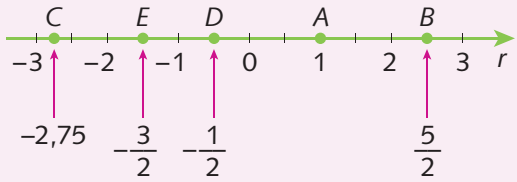
2.



ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe a reta numérica e responda às questões.



a) Que número corresponde ao ponto D? E ao ponto E? $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$

b) Qual ponto tem como correspondente o número $\frac{5}{2}$? E qual corresponde ao número 1? ponto B; ponto A

c) Que ponto está destacado entre os números inteiros -3 e -2? ponto C

2 Desenhe uma reta numérica e represente os pontos:

a) A, que corresponde a $-0{,}6$;

b) B, que corresponde a $-\frac{7}{2}$;

c) C, que corresponde a $\frac{7}{2}$;

d) D, que corresponde a $\frac{5}{4}$.

3 Desenhe uma reta numérica e represente o ponto M que corresponde a $-\frac{3}{8}$ e o ponto N que corresponde a $\frac{5}{7}$.

3.

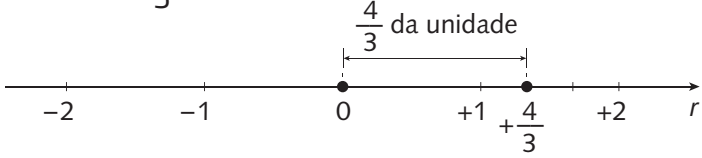
3 Módulo de um número racional

Chamamos de **módulo** ou **valor absoluto** de um número racional a distância do ponto que corresponde esse número até a origem da reta numérica.

Representamos o módulo ou valor absoluto de um número racional colocando-o entre duas barras verticais | |.

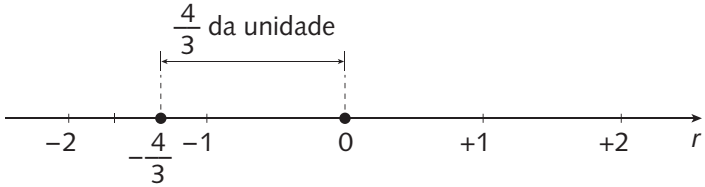
Exemplos

- Módulo do número racional $+\frac{4}{3}$.



O módulo de $+\frac{4}{3}$ é $\frac{4}{3}$. Indicamos: $\left|+\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

- Módulo do número racional $-\frac{4}{3}$.

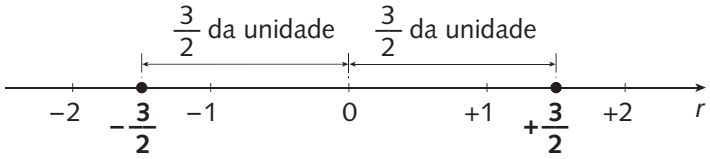


O módulo de $-\frac{4}{3}$ é $\frac{4}{3}$. Indicamos: $\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

GUILHERME CASAGRANDI
GUILHERME CASAGRANDI
GUILHERME CASAGRANDI
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Oposto de um número racional

Considere os pontos correspondentes aos números racionais $+\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$, situados na reta numérica a seguir.



GUILHERME CASAGRANDI

Os números racionais $+\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$ correspondem a pontos que estão à mesma distância da origem. Para obtê-los, a partir da origem, percorremos sentidos opostos da reta numérica. Esses números são **opostos** ou **simétricos**.

Veja outros exemplos:

- 0,5 e −0,5 são números racionais opostos ou simétricos;
- $\frac{7}{10}$ e $-\frac{7}{10}$ também são números racionais opostos ou simétricos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine:

a) o oposto de $\frac{3}{8}$; $-\frac{3}{8}$

b) o simétrico de $\frac{13}{9}$; $-\frac{13}{9}$

c) o simétrico de $\frac{7}{4}$; $-\frac{7}{4}$

d) o oposto de $-\frac{1}{7}$. $\frac{1}{7}$

2 Determine o módulo de:

a) $-\frac{5}{19}$ $\frac{5}{19}$ b) $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{200}$ $\frac{1}{200}$ d) $-0{,}05$ 0,05

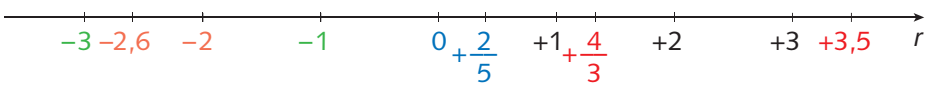
3 Escreva quais números racionais cada letra representa, considerando o módulo.

a) $|R| = \frac{4}{7}$ $-\frac{4}{7}$ ou $+\frac{4}{7}$ c) $|S| = 0{,}3$ −0,3 ou +0,3

b) $|T| = \frac{7}{9}$ $-\frac{7}{9}$ ou $+\frac{7}{9}$ d) $|V| = 0{,}75$ −0,75 ou +0,75

5 Comparação de números racionais

Observe alguns números racionais representados na reta numérica cuja seta indica a orientação crescente da esquerda para a direita:



GUILHERME CASAGRANDI

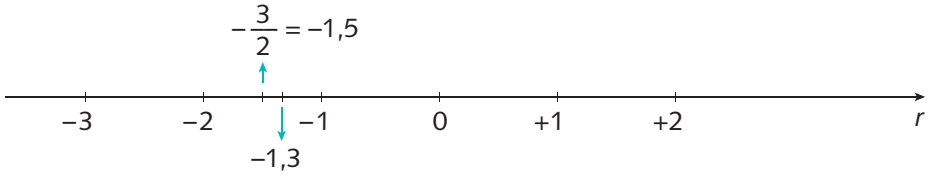
O número −2,6 é menor que 2, pois está localizado à esquerda de 2 na reta numérica.

O mesmo acontece com os números -3 e -1, com 0 e $\frac{2}{5}$ e com $\frac{4}{3}$ e 3,5. Indicamos:

- $-3 < -1$ (lemos: "menos 3 é menor que menos 1")
- $0 < \frac{2}{5}$ (lemos: "zero é menor que dois quintos")
- $\frac{4}{3} < 3{,}5$ (lemos: "quatro terços é menor que três vírgula cinco")

> Dados dois números racionais quaisquer, o menor deles será aquele que estiver à esquerda do outro na reta numérica.

Agora, vamos comparar os números racionais $-1{,}3$ e $-\frac{3}{2}$.



GUILHERME CASAGRANDI

Observe que $-1{,}5 < -1{,}3$; então, $-\frac{3}{2} < -1{,}3$.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Utilizando o sinal $<$, escreva em ordem crescente, os seguintes números racionais: $+\frac{3}{5}, -\frac{5}{3}, 1, +\frac{10}{5}, -\frac{2}{8}$

$-\frac{5}{3} < -\frac{2}{8} < +\frac{3}{5} < 1 < +\frac{10}{5}$

2 Utilizando o sinal $>$, escreva em ordem decrescente, os seguintes números racionais: $+3, -\frac{1}{5}, 0, -\frac{9}{4}, +\frac{4}{5}$

$+3 > +\frac{4}{5} > 0 > -\frac{1}{5} > -\frac{9}{4}$

3 Qual é o maior número racional em cada caso?

a) $-5{,}7$ ou $-3{,}2$ $-3{,}2$

b) $\frac{2}{5}$ ou $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$

c) 0 ou $-0{,}15$ 0

d) $-\frac{3}{5}$ ou $-0{,}5$ $-0{,}5$

6 Adição e subtração de números racionais

Observe as situações a seguir.

Situação 1

Emílio verificou que sua conta bancária tinha saldo negativo de R$ 480,50. No dia seguinte, movimentou essa conta bancária ao fazer pagamentos no valor de R$ 376,25. Após esses pagamentos, qual ficou sendo o saldo da conta bancária de Emílio?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Podemos representar o saldo inicial por: $-480{,}50$ e os pagamentos por: $-376{,}25$.

Para responder à pergunta, podemos calcular:

$(-480{,}50) + (-376{,}25)$

$(-480{,}50) + (-376{,}25) = -856{,}75$

Portanto, após os pagamentos, a conta bancária de Emílio ficou com saldo negativo de R$ 856,75.

GEORGE TUTUMI

Situação 2

No início de certa noite em São Joaquim (SC), foi registrada a temperatura de $-7{,}6$ °C. No início da manhã seguinte, foi registrado um aumento de 5,5 °C na temperatura. Qual foi a temperatura registrada em São Joaquim no início dessa manhã?

Podemos representar a temperatura no início da noite por: $-7{,}6$ e a elevação da temperatura por: $+5{,}5$.

Para responder à pergunta, calculamos: $(-7{,}6) + (+5{,}5) = -2{,}1$

Portanto, a temperatura registrada em São Joaquim no início dessa manhã foi de $-2{,}1$ °C.

Situação 3

Na 1ª etapa de uma expedição submarina, Júlio mergulhou a $-20{,}5$ m de profundidade. Na 2ª etapa, ele desceu mais alguns metros, atingindo $-27{,}3$ m de profundidade. Quantos metros Júlio desceu na 2ª etapa da expedição?

GEORGE TUTUMI

Podemos representar a profundidade atingida ao término da 1ª etapa por: $-20{,}5$ e a profundidade atingida ao término da 2ª etapa por: $-27{,}3$.

Para responder à pergunta, podemos fazer: $(-27{,}3) - (-20{,}5)$

Observe que $-(-20{,}5)$ é o simétrico do número $-20{,}5$; ou seja, é igual a $+20{,}5$.

Assim: $(-27{,}3) - (-20{,}5) = (-27{,}3) + (+20{,}5) = -6{,}8$

Portanto, Júlio desceu 6,8 m na 2ª etapa da expedição.

Na adição e subtração com números racionais, são válidas as mesmas regras de sinais utilizadas na adição e subtração com números inteiros. Veja alguns exemplos com números racionais na forma de fração.

- $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}$
- $\left(+\frac{1}{5}\right) - \left(+\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3}{15} - \frac{10}{15} = \frac{3-10}{15} = -\frac{7}{15}$
- $\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right) + \left(+\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(+\frac{2}{7}\right) + \left(+\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{2}{7} + \frac{5}{2} = \frac{-21+4+35}{14} = +\frac{18}{14}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lendo e aprendendo

Um problema famoso: a divisão dos camelos

Um dos mais famosos desafios do livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan (pseudônimo de Júlio César de Mello e Souza), é o problema dos camelos.

Nesse problema, uma herança correspondente a 35 camelos foi deixada para três filhos. A divisão da herança deveria ser feita desta maneira:

- $\frac{1}{2}$ dos camelos para o filho mais velho;
- $\frac{1}{3}$ dos camelos para o filho do meio;
- $\frac{1}{9}$ dos camelos para o filho mais moço.

Nenhuma das divisões de 35 por 2, 3 e 9 era exata, e o problema tornou-se difícil de resolver. Até que um sábio propôs doar seu camelo aos irmãos para facilitar a divisão. Em troca, ele pediu que lhe dessem os camelos que sobrassem. Os filhos concordaram e, assim, passou a haver 36 camelos para dividir.

- O filho mais velho recebeu: $\frac{36}{2} = 18 \longrightarrow$ 18 camelos
- O filho do meio recebeu: $\frac{36}{3} = 12 \longrightarrow$ 12 camelos
- O filho mais novo recebeu: $\frac{36}{9} = 4 \longrightarrow$ 4 camelos

Feita a partilha, os filhos receberam 34 camelos ($18 + 12 + 4$) e o sábio teve de volta seu camelo e recebeu um que sobrou. Dessa forma, o problema foi solucionado.

Com o total de 36 camelos, constatamos que os filhos e o sábio ficaram satisfeitos, já que os primeiros conseguiram dividir exatamente a herança e o segundo ficou com dois camelos.

Mas por que, mesmo com a divisão exata da herança, sobraram dois camelos para o sábio?

Isso ocorreu porque $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ é igual a $\frac{17}{18}$, que é menor que uma unidade, ou seja, $\frac{18}{18}$, que representa a herança total a ser dividida.

EDUARDO FRANCISCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue as adições e as subtrações.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)$ $-\frac{5}{12}$

b) $\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(-\frac{2}{6}\right)$ $-\frac{19}{21}$

c) $\left(+\frac{1}{7}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)$ $-\frac{4}{21}$

d) $\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)$ $\frac{1}{3}$

e) $\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{1}{8}\right)$ $-\frac{27}{40}$

f) $\left(-\frac{3}{4}\right)-5$ $-\frac{23}{4}$

2 Calcule.

a) $(+3{,}8)+(+5{,}72)$ 9,52

b) $(-1{,}75)+(-3{,}84)$ −5,59

c) $(+5{,}5)-(+8{,}13)$ −2,63

d) $(-4{,}72)-(-0{,}28)$ −4,44

3 Calcule o valor de cada expressão.

a) $\frac{3}{7}-1+\frac{4}{3}$ $\frac{16}{21}$

b) $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ $\frac{31}{24}$

c) $-0{,}25+1{,}5-0{,}3$ 0,95

d) $-\frac{5}{12}-\frac{1}{12}+\frac{4}{6}$ $\frac{1}{6}$

e) $0{,}375-0{,}125-0{,}625$ −0,375

f) $\frac{1}{5}-2+\frac{1}{7}$ $-\frac{58}{35}$

4 Qual é o valor de cada expressão?

a) $1{,}7+\left(\frac{2}{3}-0{,}25\right)-\frac{1}{4}$ $\frac{28}{15}$

b) $\left[1{,}6+\left(\frac{1}{4}-0{,}75+2\right)-\frac{3}{5}\right]$ 2,5

Lembre os alunos que as primeiras operações a serem efetuadas são as que estão dentro dos parênteses.

5 Escreva a sequência de teclas que Beatriz deverá apertar em uma calculadora para determinar o valor de $(+4{,}2)-(-3{,}7)$. Qual será o resultado? Lembre-se de que empregamos o ponto para indicar a vírgula de um número decimal. 4 . 2 − 3 . 7 +/− = 7.9

6 Um submarino encontra-se a −60 m de profundidade. Se descer o dobro, que profundidade o submarino atingirá? −180 m

7 Em certo mês, uma cidade do Sul do país teve sua temperatura máxima de 14,5 °C e temperatura mínima de −2,8 °C. Qual foi a diferença entre as temperaturas máxima e mínima registradas nesse mês? 17,3 °C

8 Lina possuía R$ 312,50. Recebeu R$ 250,00 do seu pai e efetuou 3 pagamentos nos valores de R$ 108,15, R$ 89,00 e R$ 204,50. Com quanto Lina ficou? R$ 160,85

9 Vítor gastou, em maio, $\frac{1}{3}$ do seu salário com alimentação e $\frac{1}{2}$ com entretenimento, sobrando-lhe ainda R$ 315,00. Qual foi o salário de Vítor nesse mês? R$ 1 890,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7 Multiplicação de números racionais

Observe as situações a seguir.

Situação 1

ANELINA/SHUTTERSTOCK

Rodrigo comprou 2,7 quilogramas de maçã ao preço de R$ 5,90 o quilograma. Quanto Rodrigo gastou nessa compra?

Para resolver esse problema, podemos efetuar a multiplicação: $2{,}7 \cdot 5{,}90$

$$2{,}7 \cdot 5{,}90 = \frac{27}{10} \cdot \frac{590}{100} = \frac{15\,930}{1000} = 15{,}930 = 15{,}93$$

Portanto, Rodrigo gastou R$ 15,93 nessa compra.

No algoritmo a seguir, que representa o gasto de Rodrigo nessa compra, o número de casas decimais do produto é igual à soma do número de casas decimais dos fatores:

$$\begin{array}{rl} 5,90 & \leftarrow \text{duas casas decimais} \\ \times\ 2,7 & \leftarrow \text{uma casa decimal} \\ \hline 4130 & \\ +\ 1180 & \\ \hline 15,930 & \leftarrow \text{três casas decimais } (2+1=3) \end{array}$$

$15{,}930 = 15{,}93$

De maneira prática, no algoritmo tradicional, multiplicamos os números desconsiderando a vírgula dos fatores e efetuamos o cálculo. A seguir, acrescentamos a vírgula ao resultado de modo que o número de casas decimais do produto seja igual à soma do número de casas decimais dos fatores.

Situação 2

Paula comprou cinco caixas de piso cerâmico, cada um delas com 3,24 metros quadrados. Calcule o valor total dessa compra, sabendo que o metro quadrado desse piso custa R$ 24,40.

Para resolver esse problema, podemos efetuar a multiplicação: $5 \cdot 3{,}24 \cdot 24{,}40$

$5 \cdot 3{,}24 \cdot 24{,}40 =$

$$\begin{array}{rl} 3,24 & \leftarrow \text{duas casas decimais} \\ \times\ 5 & \leftarrow \text{zero casa decimal} \\ \hline 16,20 & \leftarrow \text{duas casas decimais} \end{array}$$

$= 16{,}20 \cdot 24{,}40 =$

$$\begin{array}{rl} 24,40 & \leftarrow \text{duas casas decimais} \\ \times\ 16,20 & \leftarrow \text{duas casas decimais} \\ \hline 0000 & \\ 4880 & \\ 14640 & \\ +\ 2440 & \\ \hline 395,2800 & \leftarrow \text{quatro casas decimais} \end{array}$$

$395{,}2800 = 395{,}28$

$= 395{,}28$

Portanto, o valor total da compra é R$ 395,28.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Situação 3

Nilza e Norma fizeram uma dívida de R$ 5 490,00 para repor o estoque da papelaria delas. À Norma coube $\frac{2}{3}$ dessa dívida. Ela pagou com cartão de débito, cujo saldo era R$ 3 630,00. Norma tinha dinheiro suficiente para esse pagamento? Qual ficou sendo o saldo de sua conta bancária após o pagamento?

Para resolver esse problema, devemos calcular o valor da expressão:

$$\frac{2}{\cancel{3}_{1}} \cdot \overset{1830}{\cancel{5490}} = 3660$$

$$3630 - 3660 = -30$$

Norma não tinha dinheiro suficiente para esse pagamento. Sua conta ficou com saldo negativo de R$ 30,00.

Na multiplicação com números racionais, são válidas as mesmas regras de sinais aplicadas na multiplicação com números inteiros.

Veja mais alguns exemplos com números racionais escritos na forma de fração.

- $\left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{8}$
- $\left(-\frac{49}{20}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(+\frac{5}{18}\right) = \left(+\frac{\overset{7}{\cancel{49}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{10}{\cancel{20}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}}\right) \cdot \left(+\frac{5}{18}\right) = \left(+\frac{7 \cdot 1}{10 \cdot 1}\right) \cdot \left(+\frac{5}{18}\right) = +\frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \cdot 18} = +\frac{7}{36}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o valor das expressões. Em seguida, confira o resultado utilizando uma calculadora.

a) $(5{,}4) \cdot (-3{,}2)$ $-17{,}28$

b) $(-1{,}08) \cdot (-2{,}5)$ $2{,}7$

2 Calcule. **a)** $-9{,}24$ **b)** $-0{,}7$ **c)** $86{,}602$ **d)** $9{,}7695$

a) $(-3{,}85) \cdot (+2{,}4)$

b) $(+1{,}4) \cdot (-0{,}5)$

c) $(+10{,}6) \cdot (+8{,}17)$

d) $(-8{,}35) \cdot (-1{,}17)$

3 Efetue as multiplicações.

a) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)$ $\frac{7}{5}$

b) $\left(+\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{16}{81}\right)$ $-\frac{64}{729}$

c) $\left(+\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$ $-\frac{5}{6}$

d) $\left(+\frac{4}{5}\right) \cdot 0$ 0

e) $(+3) \cdot \left(-\frac{3}{9}\right) \cdot \left(+\frac{18}{6}\right)$ -3

4 Isadora vai revestir uma das paredes de seu quarto com um papel decorativo. Essa parede tem 4,35 m de comprimento por 2,80 m de largura. Quantos metros quadrados de papel decorativo serão necessários para cobrir essa parede? $12{,}18\ m^2$

5 Calcule.

a) $(-2{,}5) \cdot 30$ -75

b) $6{,}8 \cdot (-30)$ -204

c) $(-0{,}3) \cdot (-0{,}01)$ $0{,}003$

d) $0{,}4 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)$ $-\frac{7}{20}$

6 Determine o produto dos números -40 e $-0{,}025$. O produto desses números é igual a 1.

Os alunos devem lembrar que as multiplicações devem ser efetuadas antes das adições e subtrações.

7 Calcule, no caderno, o valor da expressão:

$\left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{81} + 0{,}3\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$ $-\frac{41}{360}$

8 Em uma sessão de cinema foram vendidos 328 ingressos, sendo 80 meias-entradas. Calcule o valor arrecadado nessa sessão, sabendo que o preço do ingresso (inteiro) custa R$ 16,50. R$ 4 752,00

9 Pedro comprou uma moto. Ele pagou $\frac{3}{10}$ de entrada e dividiu o restante em 20 parcelas iguais de R$ 217,70. Qual foi o valor da moto? R$ 6 220,00

10 Junte-se a um colega e façam o que se pede.

a) Calculem os produtos:

- $\left(-\frac{2}{9}\right) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)$ 1
- $\left(+\frac{15}{4}\right) \cdot \left(+\frac{4}{15}\right)$ 1
- $\left(-\frac{1}{19}\right) \cdot \left(-\frac{19}{1}\right)$ 1

b) Respondam: por que fração devemos multiplicar $\left(-\frac{6}{5}\right)$ para obter $+1$? $\left(-\frac{5}{6}\right)$

c) Escrevam três frações e troquem entre si. Cada um de vocês deve obter as frações que, multiplicadas pelas frações dadas pelo outro, resultem em 1. Resposta pessoal.

d) Dada a fração $\frac{a}{b}$, com a e b números inteiros diferentes de zero, respondam: por qual fração ela deve ser multiplicada para que se obtenha 1 como resultado? $\frac{b}{a}$

e) $\left(-\frac{2}{9}\right)$ e $\left(-\frac{9}{2}\right)$, $\left(+\frac{15}{4}\right)$ e $\left(+\frac{4}{15}\right)$, $\left(-\frac{1}{19}\right)$ e $\left(-\frac{19}{1}\right)$ são inversos multiplicativos, pois o produto deles é 1. Escrevam dois pares de frações que sejam inversos multiplicativos e passem para outra dupla verificar se o produto deles é 1. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8 Divisão de números racionais

Observe as situações a seguir.

Situação 1

Lúcio comprou 180 bolas de um mesmo modelo para revendê-las em sua loja. Pagou R$ 675,00 por essas bolas. No entanto, por causa da concorrência de lojas vizinhas, precisou vendê-las com desconto, de modo que só conseguiu R$ 450,00 por elas.

Qual foi o prejuízo de Lúcio em cada bola?

Para calcular o prejuízo de Lúcio, devemos resolver a expressão: (450 − 675) : 180, ou seja, efetuar a divisão (−225) : 180.

GEORGE TUTUMI

Observe, abaixo, a divisão de 225 por 180:

C	D	U		
2	2	5	|	180
− 1	8	0		1 , 2 5
	4	5	0	U , d c
−	3	6	0	
		9	0	0
−	9	0	0	
				0

$225 : 180 = 1{,}25$

Portanto, o prejuízo de Lúcio foi R$ 1,25 em cada bola.

Podemos indicar: $(-225) : 180 = -1{,}25$

Situação 2

GEORGE TUTUMI

Lúcia distribuiu todo o conteúdo de 3 garrafões de 20 litros em garrafas com capacidade de $\frac{6}{10}$ de litro. Quantas garrafas, completamente cheias, foram utilizadas?

Para resolver essa questão podemos calcular a expressão $(3 \cdot 20) : \frac{6}{10}$.

$$60 : \frac{6}{10} = 60 \cdot \frac{10}{6} = \frac{600}{6} = 100$$

Logo, foram utilizadas 100 garrafas de $\frac{6}{10}$ de litro.

Na divisão com números racionais são válidas as mesmas regras de sinais aplicadas na divisão com números inteiros.

Veja agora mais exemplos de divisões de números racionais na forma de fração.

- $\left(+\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

inversos multiplicativos

- $\left(+\frac{7}{5}\right) : (+4) = \left(+\frac{7}{5}\right) \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) = +\frac{7}{20}$

- $\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{8}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = +\frac{6}{24} = +\frac{1}{4}$

- $\left(-\frac{49}{20}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right) : \left(+\frac{14}{5}\right) =$

$= \left[\left(-\frac{49}{20}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)\right] \cdot \left(+\frac{5}{14}\right) =$

$= \left(+\frac{{}^{49}\cancel{343}}{{}_{8}\cancel{40}}\right) \cdot \left(+\frac{{}^{1}\cancel{5}}{{}_{2}\cancel{14}}\right) =$

$= +\frac{49 \cdot 1}{8 \cdot 2} = +\frac{49}{16}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o valor das expressões. Depois, confira o resultado utilizando uma calculadora.

a) $-27{,}6 : 1{,}5$ $-18{,}4$

b) $(-4{,}9) : (-0{,}98)$ 5

2 Calcule, no caderno:

a) $(-200) : (+0{,}5)$ -400

b) $(+16{,}2) : (-3{,}6)$ $-4{,}5$

c) $(-81{,}64) : (-6{,}5)$ 12,56

d) $(+12{,}6) : (-0{,}25)$ $-50{,}4$

3 Efetue as divisões.

a) $\left(+\frac{7}{6}\right) : \left(-\frac{1}{7}\right)$ $-\frac{49}{6}$ b) $\left(-\frac{4}{7}\right) : \left(-\frac{8}{7}\right)$ $\frac{1}{2}$

c) $\left(+\frac{3}{7}\right) : \left(+\frac{21}{49}\right)$ 1 f) $\left(-\frac{5}{2}\right) : (+8)$ $-\frac{5}{16}$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{9}{15}\right)$ 1 g) $(+16) : \left(-\frac{3}{8}\right)$ $-\frac{128}{3}$

e) $\left(-\frac{4}{9}\right) : \left(+\frac{16}{81}\right)$ $-\frac{9}{4}$ h) $\left(-\frac{3}{5}\right) : (+0{,}1)$ -6

4 Jorge tinha um terreno de 23 575 metros quadrados. Ele reservou 6 100 metros quadrados desse terreno para área de lazer. Do que restou, Jorge reservou $\frac{1}{5}$ para estacionamento e dividiu o restante em lotes de 349,50 metros quadrados cada um. Quantos lotes Jorge obteve? 40 lotes

9 Potenciação de números racionais

Floc não consegue pegar a bolinha que sua dona deixa cair de uma altura *h*. Cada vez que a bola toca o chão, ela sobe até $\frac{3}{5}$ da altura anterior. Que fração da altura inicial (*h*) a bolinha de Floc atingirá após bater pela terceira vez no chão? Escreva esta fração da altura (*h*) na forma de potência.

GEORGE TUTUMI

Vamos verificar passo a passo as alturas da bolinha.

- Altura inicial: *h*
- Após a 1ª batida no chão: $\frac{3}{5}$ de $h = \frac{3}{5}h$
- Após a 2ª batida no chão: $\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{5}h = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}h = \left(\frac{3}{5}\right)^2 h$
- Após a 3ª batida no chão: $\frac{3}{5}$ de $\left(\frac{3}{5}\right)^2 h = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 h = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}h = \left(\frac{3}{5}\right)^3 h$

Peça aos alunos que calculem a potência $\left(\frac{3}{5}\right)^3$. Eles devem obter $\frac{27}{125}$.

Após a terceira vez que bater no chão, a bolinha atingirá $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ da altura inicial (*h*).

Nessa situação, foi possível recordar que a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Veja agora alguns exemplos de potências de números racionais negativos.

Exemplos

- $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}$
- $\left(+\frac{2}{5}\right)^3 = \left(+\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{5}\right) = +\frac{8}{125}$
- $(-0{,}4)^4 = (-0{,}4) \cdot (-0{,}4) \cdot (-0{,}4) \cdot (-0{,}4) = +0{,}0256$
- $(-1{,}2)^2 = (-1{,}2) \cdot (-1{,}2) = +1{,}44$

Assim, para um número racional a com expoente natural n maior que 1, definimos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Observações

1 Para um número racional a com expoente 1, temos: $a^1 = a$.
Veja os exemplos:

- $\left(-\frac{7}{4}\right)^1 = -\frac{7}{4}$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$
- $(-0{,}32)^1 = -0{,}32$

2 Para um número racional a não nulo, com expoente igual a zero, temos: $a^0 = 1$.
Veja os exemplos:

- $\left(+\frac{2}{3}\right)^0 = 1$
- $\left(-\frac{4}{5}\right)^0 = 1$
- $(-0{,}47)^0 = 1$

Propriedades da potenciação de números racionais

As propriedades das potências aplicadas aos números inteiros também são válidas para os números racionais.

1ª propriedade

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, sendo a um número racional diferente de zero e m e n, números naturais.

Exemplos

- $\left(+\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(+\frac{1}{2}\right)^{4+2} = \left(+\frac{1}{2}\right)^6$
- $(-7{,}1)^3 \cdot (-7{,}1) = (-7{,}1)^{3+1} = (-7{,}1)^4$

2ª propriedade

$a^m : a^n = a^{m-n}$, sendo a um número racional diferente de zero e m e n, números naturais, sendo $m \geqslant n$.

Exemplos

- $\left(+\frac{3}{5}\right)^6 : \left(+\frac{3}{5}\right)^2 = \left(+\frac{3}{5}\right)^{6-2} = \left(+\frac{3}{5}\right)^4$
- $(-2{,}8)^3 : (-2{,}8) = (-2{,}8)^{3-1} = (-2{,}8)^2$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3ª propriedade

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, sendo a um número racional diferente de zero e m e n, números naturais.

Exemplos

- $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)^{2 \cdot 3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^6$
- $[(-1{,}41)^3]^5 = (-1{,}41)^{3 \cdot 5} = (-1{,}41)^{15}$

4ª propriedade

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ e $(a : b)^m = a^m : b^m$, sendo a e b números racionais diferentes de zero e m, um número natural.

Exemplos

- $\left[\left(+\frac{1}{2}\right) \cdot (-5)\right]^2 = \left(+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-5)^2$
- $[(-20) \cdot (+5{,}2)]^3 = (-20)^3 \cdot (+5{,}2)^3$
- $\left[(+2{,}5) : \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 = (+2{,}5)^2 : \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule as potências.

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ $\frac{1}{81}$

b) $(0{,}2)^3$ $0{,}008$

c) $(0{,}01)^2$ $0{,}0001$

d) $\left(-\frac{17}{20}\right)^0$ 1

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ $\frac{1}{16}$

f) $(1{,}2)^2$ $1{,}44$

g) $-0{,}5^1$ $-0{,}5$

h) $\left(-\frac{1}{6}\right)^3$ $-\frac{1}{216}$

2 Calcule o valor das expressões.

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ 1

Observe se os alunos se lembram de que devem calcular primeiro as potências, depois as multiplicações e por último as adições e subtrações.

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ $\frac{15}{8}$

3 Aplique as propriedades das potências e escreva os resultados por meio de uma só potência.

a) $\left(\frac{7}{13}\right)^{10} : \left(\frac{7}{13}\right)^6$ $\left(\frac{7}{13}\right)^4$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^2$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{14}$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$ $\left(\frac{4}{3}\right)^5$

d) $(-0{,}5)^6]^2$ $(-0{,}5)^{12}$

e) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

f) $[(0{,}222...)^0]^{100}$ $(0{,}222...)^0$

4 Represente as expressões com uma só potência de base 2.

a) $32 \cdot 0{,}25 \cdot 64 \cdot \frac{1}{16}$ 2^5

b) $(0{,}25)^8 \cdot [(64)^2]^3$ 2^{20}

5 A população de um tipo de bactéria, a cada semana, aumenta 10%, ou seja, corresponde a $\frac{110}{100}$ ou $\frac{11}{10}$ da população da semana anterior. Um biólogo contou 2 000 elementos em uma colônia dessas bactérias. Quantos indivíduos terá a população após três semanas da contagem?

2 662 indivíduos

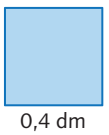
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10 Raiz quadrada de números racionais

Observe as situações a seguir.

Situação 1

Um quadrado tem 0,4 dm de medida do lado.



LUIZ RUBIO

Calculando a área desse quadrado, temos:

$(0,4 \cdot 0,4)\ dm^2 = 0,16\ dm^2$

O número racional 0,16 é um **quadrado perfeito** e 0,4 é a raiz quadrada desse número.

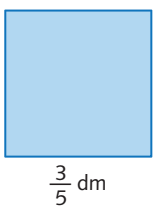
Chamamos números racionais quadrados perfeitos aqueles que podem ser escritos como potência de base racional e expoente 2.

Então: $\sqrt{0,16} = 0,4$

> A raiz quadrada de um número racional quadrado perfeito é o número racional não negativo cujo quadrado é igual ao número dado.

Situação 2

Um quadrado tem $\frac{3}{5}$ dm de medida do lado.



LUIZ RUBIO

Calculando a área desse quadrado, temos:

$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) dm^2 = \frac{9}{25}\ dm^2$

O número racional $\frac{9}{25}$ é um **quadrado perfeito** e $\frac{3}{5}$ é a raiz quadrada desse número.

Ou seja: $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Veja outros exemplos:

- $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$, pois $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
- $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
- $\sqrt{0,04} = 0,2$, pois $(0,2)^2 = 0,04$
- $\sqrt{0,36} = 0,6$, pois $(0,6)^2 = 0,36$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observações

1 A raiz quadrada de números racionais negativos não é um número racional, pois o quadrado de um número racional nunca é negativo. Veja:

$\sqrt{-\frac{1}{25}}$ não é um número racional, pois não existe um número racional que multiplicado por ele mesmo dê como resultado um número negativo.

Cuidado!

- $-\sqrt{\frac{1}{64}}$ é um número racional

$-\sqrt{\frac{1}{64}} = -\frac{1}{8}$

- $-\sqrt{0,25}$ é um número racional

$-\sqrt{0,25} = -\sqrt{\frac{25}{100}} = -\frac{5}{10} = -0,5$

2 A raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito não é um número racional. Veja:

- $\sqrt{2,5}$ não é um número racional, pois 2,5 não é um racional quadrado perfeito.
- $\sqrt{\frac{36}{47}}$ não é um número racional, pois $\frac{36}{47}$ não é um racional quadrado perfeito.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule, se possível, as raízes quadradas.

a) $\sqrt{\frac{100}{9}}$ $\frac{10}{3}$

b) $-\sqrt{\frac{1}{81}}$ $-\frac{1}{9}$

c) $-\sqrt{0,01}$ $-0,1$

d) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ $\frac{2}{5}$

e) $\sqrt{6,25}$ 2,5

f) $\sqrt{\frac{-81}{64}}$ Essa raiz quadrada não está definida no conjunto dos números racionais.

g) $-\sqrt{\frac{1}{144}}$ $-\frac{1}{12}$

h) $\sqrt{0,64}$ 0,8

2 Calcule o valor de cada uma das expressões.

a) $\frac{2}{\sqrt{81}} - \frac{\sqrt{16}}{3} + \frac{2}{\sqrt{25}} - \frac{\sqrt{36}}{3}$ $-\frac{122}{45}$

b) $\sqrt{\frac{4}{25}} - \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{9}{25}} - \sqrt{\frac{4}{9}}$ 0

c) $\sqrt{\frac{1}{25}} \cdot \sqrt{\frac{25}{9}} \cdot \left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{16}}$ $\frac{1}{2}$

3 Identifique os números racionais que não têm raiz quadrada exata.

a) 81

b) $\frac{1}{144}$

c) $\frac{13}{17}$

d) $\frac{1}{64}$

e) $\frac{14}{18}$

f) $\frac{169}{225}$

alternativas **c** e **e**

4 Responda às questões.

a) Um quadrado tem área igual a 23,04 m². Qual é a medida do lado desse quadrado? 4,8 m²

b) A medida do lado de um quadrado é $\sqrt{\frac{25}{36}}$ m. Qual é a área desse quadrado? $\frac{25}{36}$ m²

c) Qual é o número maior: $\sqrt{40}$ ou 6,3? $\sqrt{40}$

d) Qual é o número racional positivo em que a multiplicação dele por ele mesmo resulta em 1,44? 1,2

5 A sala da casa de Ronaldo tem a forma de um quadrado com área igual a 24 m². Calcule, por meio de tentativa, a medida aproximada do lado dessa sala, sabendo que ela situa-se entre 4 m e 5 m.

aproximadamente 4,9 m

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11 Expressões numéricas

Na resolução de expressões numéricas envolvendo números racionais, valem os mesmos procedimentos utilizados nas expressões com números inteiros. Observe os exemplos:

- $\left(\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{14}{4}} - 0{,}15\right) : (1 - 3 \cdot 0{,}4) =$

$= \left(\dfrac{7}{5} : \dfrac{14}{4} - 0{,}15\right) : (1 - 1{,}2) =$

$= \left(\dfrac{\cancel{7}^{1}}{5} \cdot \dfrac{4}{\cancel{14}^{2}} - 0{,}15\right) : (-0{,}2) =$

$= \left(\dfrac{4}{10} - 0{,}15\right) : (-0{,}2) =$

$= (0{,}4 - 0{,}15) : (-0{,}2) =$

$= (+0{,}25) : (-0{,}2) =$

$= -1{,}25$

- $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - \sqrt{\dfrac{1}{16}} \cdot \left[\dfrac{3}{4} - \left(-2 + \dfrac{3}{2}\right)^2\right] =$

$= \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{4} \cdot \left[\dfrac{3}{4} - \left(-\dfrac{2}{1} + \dfrac{3}{2}\right)^2\right] =$

$= \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{4} \cdot \left[\dfrac{3}{4} - \left(-\dfrac{4}{2} + \dfrac{3}{2}\right)^2\right] =$

$= \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{4} \cdot \left[\dfrac{3}{4} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right] =$

$= \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{4} \cdot \left[\dfrac{3}{4} - \left(+\dfrac{1}{4}\right)\right] =$

$= \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{4} \cdot \left[\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\right] =$

$= \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{\cancel{4}_{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}_{1}}{4} =$

$= \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{8} =$

$= \dfrac{8}{72} - \dfrac{9}{72} = -\dfrac{1}{72}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
EDUARDO FRANCISCO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o valor numérico de cada expressão.

a) $\left(-2 - \dfrac{2}{5}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$ $-\frac{27}{20}$

b) $1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{2} - 1\right)^2$ $\frac{23}{27}$

c) $\left(5 - \dfrac{1}{2}\right)^2 : \left(\dfrac{1}{2} - 2\right)^3$ -6

d) $\left(0{,}1 + \dfrac{1}{5}\right) : \left(-0{,}02 + \dfrac{1}{100}\right)$ -30

e) $\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \dfrac{2}{5}$ $-\frac{1}{3}$

f) $-\dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{4} \cdot (0{,}2) + \dfrac{1}{2}$ $-\frac{3}{40}$

2 Calcule o valor das expressões.

a) $\dfrac{3 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{5}}$ $\frac{55}{28}$

b) $\dfrac{-10}{2 - \frac{3}{2}}$ -20

3 Calcule o valor numérico das expressões.

a) $2x - 9y$, sendo: $x = -\dfrac{1}{4}$ e $y = -\dfrac{1}{3}$ $\frac{5}{2}$

b) $x^2 + 2xy$, sendo: $x = -\dfrac{1}{3}$ e $y = \dfrac{1}{4}$ $-\frac{1}{18}$

c) $2x^2 - 4y + 8$, sendo: $x = 2^{-2}$ e $y = 2^{-3}$ $\frac{61}{8}$

4 Calcule o valor das expressões.

a) $[(-7)^6 \cdot (-7)^8 \cdot (-49)^3]^2 : (-7)^{18}$ $(-7)^{22}$

b) $[(-0{,}03)^7 \cdot (-0{,}03)^3 \cdot (-0{,}03)] : (-0{,}03)^8$ $(-0{,}03)^3$

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Neste capítulo, você estudou os números racionais. Cite as duas formas de representá-los.
Os números racionais podem ser representados na forma decimal ou na forma de fração.

2 O que é módulo de um número racional?
O módulo de um número racional é a distância do ponto, que corresponde a esse número, até a origem da reta numérica.

3 Quantas casas decimais terá o produto de uma multiplicação, em que o primeiro fator é 3,456 e o segundo é 1,71? O produto terá cinco casas decimais, pois o número de casas decimais do produto é igual à soma do número de casas decimais dos fatores.

4 Retome as quatro propriedades das potências aplicadas aos números racionais e responda às questões.

a) Se dissermos que a 1ª propriedade é aplicada para efetuar a multiplicação de potências de mesma base, então para que é aplicada a 2ª propriedade? Para efetuar a divisão de potências de mesma base.

b) Se a 3ª propriedade é aplicada para calcular a potência de uma potência, para que é aplicada a 4ª propriedade? Para calcular a potência de um produto (ou de um quociente).

5 No problema da divisão dos camelos, apresentado na seção *Lendo e aprendendo*, qual é a diferença entre a unidade e a soma das frações da herança dos filhos? A quantos camelos corresponde essa diferença? $\frac{1}{18}$; a 2 camelos

Aplicando

1 Escreva os números racionais abaixo na forma de fração.

a) $+6{,}8$ $\frac{34}{5}$

b) $-0{,}375$ $-\frac{3}{8}$

c) $-0{,}02$ $-\frac{1}{50}$

d) $0{,}07$ $\frac{7}{100}$

2 Trace uma reta numérica e localize:

a) o ponto A, que corresponde a $+0{,}8$;

b) o ponto B, que corresponde a $+\frac{8}{3}$;

c) o ponto C, que corresponde a $-2{,}25$;

d) o ponto D, que corresponde a $-\frac{1}{2}$.

3 Calcule o valor numérico das expressões.

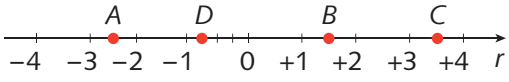
a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{5}{8}$ $\frac{37}{40}$

b) $-0{,}05 + 1{,}4 + (0{,}5 \cdot 0{,}5)$ 1,6

c) $(-0{,}3) \cdot \frac{1}{10} + 5{,}4 - \frac{13}{20}$ $\frac{118}{25}$

d) $\left(\frac{5}{8} + \frac{5}{4} + \frac{5}{2}\right) : \left(-\frac{5}{8}\right)$ -7

4 Observe a reta numérica abaixo e, depois, responda às questões.



a) Que ponto corresponde ao número $+3\frac{1}{2}$? ponto C

b) Qual é o número que corresponde ao ponto A? $-2{,}5$

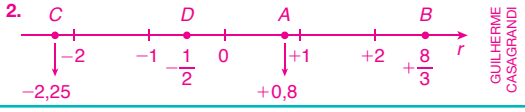
c) Qual é o número que corresponde ao ponto B? 1,5

d) Qual é o ponto que corresponde ao número $-\frac{3}{4}$? ponto D

5 Um mergulhador saiu de uma profundidade de $-0{,}6$ m para chegar à de $-7{,}5$ m. Nesse caso, ele desceu ou subiu? Quantos metros? desceu; 6,9 m

6 Podemos afirmar que dividir por 0,125 é o mesmo que multiplicar por 8? Justifique sua resposta. sim; considerando que ■ representa um número racional, temos: $\blacksquare : \frac{125}{1000} = \blacksquare \cdot \frac{\cancel{1000}^{8}}{\cancel{125}_{1}} = \blacksquare \cdot 8$

2.

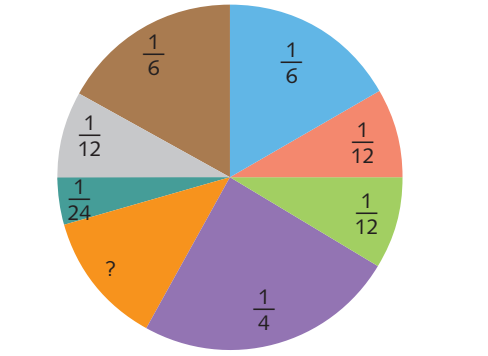


GUILHERME CASAGRANDI

GUILHERME CASAGRANDI
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7 Observe o gráfico abaixo, que representa a distribuição dos gastos de uma família.

DISTRIBUIÇÃO DOS GASTOS DE UMA FAMÍLIA



Alimentação
Água e luz
Telefone fixo, celular e internet
Aluguel
Outros
Lazer
Vestuário
Educação

LUIZ RUBIO

Fonte: orçamento da família.

Agora, responda às questões no caderno.

a) Que fração do todo representa o gasto com educação dessa família? $\frac{1}{6}$

b) Os "outros" gastos correspondem a que fração? $\frac{1}{8}$

8 Mário e Carlos terminaram uma partida de tênis. Mário acertou 15 dos 20 saques que fez. Carlos, por sua vez, acertou 72% dos saques que fez. Em sua opinião, quem sacou melhor? Que porcentagem dos saques efetuados por Mário representa seus acertos?
Mário; 75%

9 Calcule:

a) $\left(1-\frac{2}{5}\right)^2$ $\frac{9}{25}$

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^4$ $\frac{1}{625}$

c) $\left(0,3-\frac{1}{2}\right)^3$ $-0,008$

d) $(0,01)^3$ $0,000001$

10 Utilizando uma calculadora, determine a raiz quadrada de 90 com aproximação de duas casas decimais. 9,48

11 Qual é o número que, dividido por $\frac{3}{5}$, é igual a $-\frac{5}{8}$? $-\frac{3}{8}$

12 As 64 casas de um tabuleiro de xadrez preenchem uma superfície quadrada de área igual a 1936 cm^2. Qual é a medida do lado de uma das casas desse tabuleiro? 5,5 cm

OLEKSIY MAKSYMENKO PHOTOGRAPHY/ ALAMY/GLOW IMAGES

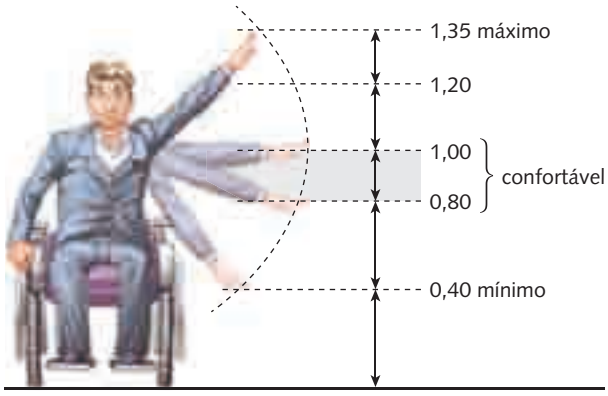
Tabuleiro de xadrez.

13 Calcule o valor das expressões.

a) $0,4 : \left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0,4$ $-0,8$

b) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (0,2) - \frac{1}{2}\right] + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-0,5)$ $-\frac{7}{15}$

14 **(Enem)** Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas, alerta para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades. Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



EDUARDO FRANCISCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é: alternativa **e**

a) 0,20 m e 1,45 m
b) 0,20 m e 1,40 m
c) 0,25 m e 1,35 m
d) 0,25 m e 1,30 m
e) 0,45 m e 1,20 m

15 Utilizando as propriedades da potenciação de números racionais reduza a expressão a uma só potência. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{13}$

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 : \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

16 Qual é o perímetro de um terreno quadrado cuja área é 806,56 m^2? 113,6 m

17 **(Enem)** Nos últimos anos, o volume de petróleo exportado pelo Brasil tem mostrado expressiva tendência de crescimento, ultrapassando as importações em 2008. Entretanto, apesar de as importações terem se mantido praticamente no mesmo patamar desde 2001, os recursos gerados com as exportações ainda são inferiores àqueles despendidos com as importações, uma vez que o preço médio por metro cúbico do petróleo importado é superior ao do petróleo nacional. Nos primeiros cinco meses de 2009, foram gastos 2,84 bilhões de dólares com importações e gerada uma receita de 2,24 bilhões de dólares com as exportações. O preço médio por metro cúbico em maio de 2009 foi de 340 dólares para o petróleo importado e de 230 dólares para o petróleo exportado. O quadro a seguir mostra os dados consolidados de 2001 a 2008 e dos primeiros cinco meses de 2009.

Comércio exterior de petróleo (milhões de metros cúbicos)		
Ano	**Importação**	**Exportação**
2001	24,19	6,43
2002	22,06	13,63
2003	19,96	14,03
2004	26,91	13,39
2005	21,97	15,93
2006	20,91	21,36
2007	25,38	24,45
2008	23,53	25,14
2009*	9,00	11,00

* Valores apurados de janeiro a maio de 2009.

Disponível em: <http://www.anp.gov.br>. Acesso em: 15 jul. 2009 (adaptado).

Considere que as importações e exportações de petróleo de junho a dezembro de 2009 sejam iguais a $\frac{7}{5}$ das importações e exportações, respectivamente, ocorridas de janeiro a maio de 2009. Nesse caso, supondo que os preços para importação e exportação não sofram alterações, qual seria o valor mais aproximado da diferença entre os recursos despendidos com as importações e os recursos gerados com as exportações em 2009? alternativa **c**

a) 600 milhões de dólares.
b) 840 milhões de dólares.
c) 1,34 bilhão de dólares.
d) 1,44 bilhão de dólares.
e) 2,00 bilhões de dólares.

18 **(Enem)** A resolução das câmeras digitais modernas é dada em *megapixels*, unidade de medida que representa um milhão de pontos. As informações sobre cada um desses pontos são armazenadas, em geral, em 3 *bytes*. Porém, para evitar que as imagens ocupem muito espaço, elas são submetidas a algoritmos de compressão, que reduzem em até 95% a quantidade de *bytes* necessários para armazená-las. Considere 1 KB = = 1000 *bytes*, 1 MB = 1000 KB, 1 GB = = 1000 MB.

Utilizando uma câmera de 2,0 *megapixels* cujo algoritmo de compressão é de 95%, João fotografou 150 imagens para seu trabalho escolar. Se ele deseja armazená-las de modo que o espaço restante no dispositivo seja o menor espaço possível, ele deve utilizar: alternativa **e**

a) um CD de 700 MB.
b) um *pen drive* de 1 GB.
c) um HD externo de 16 GB.
d) um *memory stick* de 16 MB.
e) um cartão de memória de 64 MB.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

19 **(Enem)** A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K*; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K.

A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da sequência principal

Classe espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40 000	5×10^5	40	18
B0	28 000	2×10^4	18	7
B0	9 900	80	3	2,5
G2	5 770	1	1	1
M0	3 480	0,06	0,5	0,6

Temperatura em Kelvin.
Luminosidade, massa e raio tomando o Sol como unidade.

Disponível em: <http://www.zenite.nu>.
Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

* kelvin: unidade de temperatura no Sistema Internacional de Unidades

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade? alternativa **a**

a) 20 000 vezes a luminosidade do Sol.
b) 28 000 vezes a luminosidade do Sol.
c) 28 850 vezes a luminosidade do Sol.
d) 30 000 vezes a luminosidade do Sol.
e) 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

20 **(OBM)** Laurinha tinha em sua carteira somente notas de 10 reais e moedas de 10 centavos. Ela pagou uma conta de 23 reais com a menor quantidade possível de moedas. Quantas moedas ela usou? alternativa **e**

a) 3
b) 6
c) 10
d) 23
e) 30

21 **(Obmep)** A professora Luísa observou que o número de meninas de sua turma dividido pelo número de meninos dessa mesma turma é 0,48. Qual é o menor número possível de alunos dessa turma? alternativa **b**

a) 24
b) 37
c) 40
d) 45
e) 48

Comente com os alunos que *stand up paddle* pode ser definido, de forma simplificada, como *surf* praticado em pé e com o uso de remos.

22 Após o término de uma competição de *stand up paddle*, verificou-se que a prancha de Bruna estava $\frac{1}{4}$" (um quarto de polegada) acima do limite estabelecido nessa competição e que a prancha de Luiza estava $\frac{1}{2}$" (meia polegada) abaixo desse limite. Sabendo que 1" corresponde a 2,54 cm, determine a diferença entre essas duas pranchas, em centímetro. $\frac{3}{4}$" = 1,905 cm

EDU LYRA/PULSAR IMAGENS

Praia de Ipanema no Rio de Janeiro (RJ), em 2013.

23 Calcule o valor da expressão a seguir:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot (0{,}01)^2 \cdot \sqrt{0{,}25}$$ 0,00005

24 Com uma calculadora, porém sem usar a tecla $\sqrt{\ }$, determine a raiz quadrada de 15 129. Registre no caderno suas tentativas. 123

25 **(OBM)** Podemos afirmar que $0{,}1^2 + 0{,}2^2$ é igual a: alternativa **a**

a) $\frac{1}{20}$
b) $\frac{1}{10}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{2}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

3 EXPRESSÕES ALGÉBRICAS E SENTENÇAS MATEMÁTICAS

ROB LEWINE/TETRA IMAGES/GETTY IMAGES

Nos procedimentos de diagnóstico e acompanhamento do estado nutricional de adolescentes (entre 10 anos e 19 anos de idade), também é utilizado o critério de classificação do IMC, de acordo com a idade e o sexo.

Neste capítulo, vamos iniciar o estudo do cálculo algébrico e aprender como usar as letras do alfabeto para representar quantidades numéricas. O problema proposto na abertura pode motivar uma discussão com o grupo sobre o uso das expressões algébricas no dia a dia.

Diga aos alunos que é comum o uso da palavra "peso" como sinônimo de "massa", mas essas palavras têm significados diferentes. De modo simplificado, podemos falar que peso de um corpo é a força exercida sobre ele pela atração gravitacional da Terra e massa é a quantidade de matéria presente em um corpo.

ROB LEWINE/TETRA IMAGES/GETTY IMAGES

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O Índice de Massa Corpórea (IMC) é reconhecido pela Organização Mundial de Saúde (OMS) como a principal referência para classificar as diferentes faixas de "peso".

A tabela de IMC pode ajudar a população mundial a combater a "epidemia" de obesidade, que vem se agravando cada vez mais por causa da adoção, pelas pessoas, de uma dieta pouco saudável, aliada ao sedentarismo.

Por meio do cálculo de IMC, é possível saber se um adulto está acima ou abaixo dos parâmetros ideais de "peso" para sua estatura.

O **cálculo do IMC** é feito por meio da divisão da massa (em quilograma) de um adulto pelo quadrado de sua altura (em metro).

IMC DE ADULTO (de 20 a 59 anos de idade)	
IMC	**Classificação**
Abaixo de 18,5	Subnutrido ou abaixo do peso
Entre 18,6 e 24,9	Peso ideal
Entre 25,0 e 29,9	Sobrepeso
Entre 30,0 e 34,9	Obesidade moderada
Entre 35,0 e 39,9	Obesidade alta
Acima de 40	Obesidade muito alta

Dados obtidos em: <http://scsaude.sea.sc.gov.br/web/prevencao/como-calcular-o-seu-imc>. Acesso em: 24 fev. 2015.

O cálculo do IMC de crianças e adolescentes é o mesmo dos adultos, mas na classificação deve-se levar em conta também a idade e o sexo.

- Qual é o IMC de uma pessoa que tem 1,70 m de altura e 65 kg de massa? 22,5
- Qual é a classificação da faixa de "peso" de uma pessoa que tem 1,80 m de altura e 85 kg de massa, de acordo com seu IMC? sobrepeso
- De forma geral, como poderemos representar o IMC se a massa for indicada por m e a altura, por h? $\text{IMC} = \frac{m}{(h)^2}$

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe o problema da locadora Alfa.

A locadora de carros Alfa cobra de seus clientes uma taxa de uso diário mais um valor por quilômetro percorrido.

JOSÉ LUÍS JUHAS

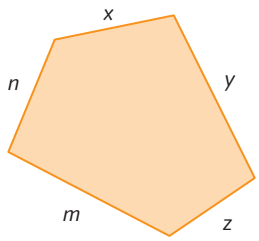
- Considere que a taxa diária cobrada pela locadora é de R$ 110,00 e o valor cobrado por quilômetro rodado é de R$ 2,00. Escreva uma expressão numérica correspondente ao valor que a cliente Lúcia, que percorreu 80 km em um dia, deverá pagar pela utilização do veículo. $110 + 80 \cdot 2$
- Resolva a expressão numérica obtida e determine qual será o valor pago por Lúcia. R$ 270,00
- O cliente Cássio alugou um carro por 2 dias e percorreu n quilômetros. Como podemos representar o valor que ele deverá pagar? $2 \cdot 110 + n \cdot 2$
- Escreva, de forma geral, uma expressão algébrica que determine o valor cobrado pela locadora de carros Alfa em um dia. Para isso, considere uma taxa T e um total de n quilômetros percorridos pelo cliente. $T + n \cdot 2$

Neste capítulo, vamos iniciar a aprendizagem de um novo segmento da Matemática: a **Álgebra**. Por meio da Álgebra, podemos transformar diversos problemas em relações matemáticas, que fornecem um caminho para a resolução. Vamos começar nosso estudo pelas expressões algébricas; elas permitem que algumas situações sejam escritas de forma geral e analisadas matematicamente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Expressões algébricas

No polígono representado na figura ao lado, as medidas dos lados estão representadas por x, y, z, m e n. Podemos representar o perímetro desse polígono pela expressão:



GUILHERME CASAGRANDI

Lembre aos alunos que perímetro é a soma das medidas de todos os lados de um polígono.

$$x + y + z + m + n$$

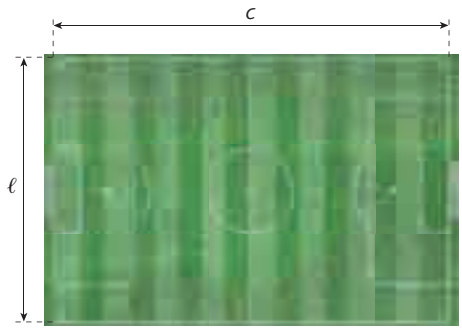
Uma expressão matemática formada por números e letras ou somente por letras é chamada de **expressão algébrica**.

Portanto, $x + y + z + m + n$ é uma expressão algébrica.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

- No campo de futebol abaixo estão indicadas as seguintes medidas: comprimento (c) e largura (ℓ).



GUILHERME CASAGRANDI

A área desse campo de futebol pode ser representada por uma expressão algébrica:

$$c \cdot \ell$$

- Um quintal tem forma retangular com uma área gramada de forma quadrada em seu interior.

Para determinar a área do piso desse quintal, podemos subtrair da área total do quintal a área do gramado. Observe:

- A área do quintal é representada por:

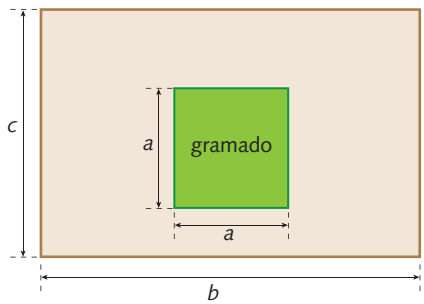
$$b \cdot c \text{ ou } bc$$

- A área do gramado é representada por:

$$a \cdot a \text{ ou } a^2$$

Logo, a expressão algébrica que representa a área do piso é:

$$b \cdot c - a \cdot a \text{ ou } bc - a^2$$



LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva a expressão algébrica correspondente a cada item. Representando o número desconhecido por x, temos:

a) O triplo de um número. $3x$

b) O quíntuplo de um número. $5x$

c) A metade de um número. $\frac{x}{2}$

d) A quarta parte de um número. $\frac{x}{4}$

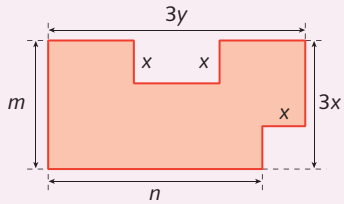
e) Dois quintos de um número. $\frac{2x}{5}$

f) A diferença entre um número e sua terça parte. $x - \frac{x}{3}$

g) A soma do dobro de um número com sua metade. $2x + \frac{x}{2}$

h) A soma de três números consecutivos. $x + (x + 1) + (x + 2)$

2 Observando a figura, é possível verificar que a medida m pode ser escrita usando apenas a medida x por meio da expressão algébrica $3x$.

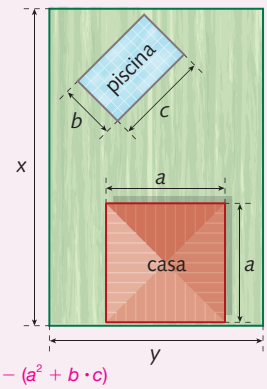


GUILHERME CASAGRANDI

Usando apenas as medidas x e y, responda: a medida n corresponde a qual expressão algébrica? $3y - x$

3 Em um prédio há nove andares. Em cada andar há três janelas. Todas as janelas têm vidro fumê com comprimento de medida a e largura de medida b. Escreva a expressão algébrica que representa a área de cada vidro fumê que há nesse prédio. ab

4 Observe um terreno retangular com casa e piscina.



GUILHERME CASAGRANDI

área do terreno: $x \cdot y$
área da casa: a^2
área da piscina: $b \cdot c$
área do gramado: $x \cdot y - (a^2 + b \cdot c)$

Represente no caderno, usando expressões algébricas, a área do terreno, a da casa, a da piscina e a do gramado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Valor numérico de uma expressão algébrica

Em expressões algébricas, as letras são chamadas de **variáveis**. Isso significa que o valor de cada letra pode ser substituído por qualquer valor numérico.

Vamos tomar como exemplo a expressão algébrica $3x + 2y + 4z$.

Se considerarmos que $x = 5$, $y = 7$ e $z = 2$, poderemos determinar o valor da expressão algébrica substituindo as variáveis x, y e z por 5, 7 e 2, respectivamente. Assim:

$3x + 2y + 4z =$

$= 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 37$

Assim, o valor numérico da expressão $3x + 2y + 4z$ é igual a 37.

Valor numérico é o resultado das operações efetuadas em uma expressão algébrica após a substituição das variáveis por números.

Exemplos

- Determinar o valor numérico da expressão $2c + 2\ell$, para $c = 75$ e $\ell = 120$.

$2c + 2\ell =$

$= 2 \cdot 75 + 2 \cdot 120 =$

$= 150 + 240 = 390$

- Determinar o valor numérico da expressão $\frac{b \cdot h}{2} - a^2$, para $a = 10$, $b = 50$ e $h = 70$.

$\frac{b \cdot h}{2} - a^2 =$

$= \frac{50 \cdot 70}{2} - 10^2 = 1750 - 100 = 1650$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Copie no caderno o quadro de valores numéricos abaixo substituindo cada ▬ corretamente.

x	-3	-4	0	$+8$	-1	$+4$	$+3$	-7
$3x$	-9	-12	0	24	-3	12	9	-21
$-x^2$	-9	-16	0	-64	-1	-16	-9	-49
x^3	-27	-64	0	512	-1	64	27	-343
$\frac{x}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2	0	4	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$-x$	3	4	0	-8	1	-4	-3	7
$2x$	-6	-8	0	16	-2	8	6	-14

2 Determine o valor numérico da expressão de cada item. b) $-\frac{3}{100}$ ou $-0{,}03$

a) $x^2 + 2xy + y^2$, para $x = -1$ e $y = -3$ 16

b) $x^2y - xy^2$, para $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}5$

c) $x^2 - y^2$, para $x = 3$ e $y = -5$ -16

3 Paulo comprou 8 metros de fio elétrico por R$ 27,20.

a) Quanto custou cada metro desse fio elétrico? R$ 3,40

b) Escreva uma expressão algébrica para representar quanto Paulo gastaria para comprar x metro desse fio. $y = 3{,}4 \cdot x$

c) Quanto Paulo gastaria se tivesse comprado 15 metros desse fio? R$ 51,00

4 Vamos considerar a sequência 1, 4, 9, ... Para determinar, por exemplo, o 50º termo dessa sequência, é preciso descobrir a relação existente entre seus termos e escrever uma expressão algébrica que se aplique a qualquer um deles. Para fazer a representação de forma generalizada, dizemos que o termo que está na posição n é denominado *enésimo* termo (*n-ésimo* termo).

Observe:

1º termo	2º termo	3º termo	...	*n-ésimo* termo
1	4	9	...	n^2
1^2	2^2	3^2	...	n^2

Note que a base de cada potência é o número correspondente à posição de cada termo na sequência.

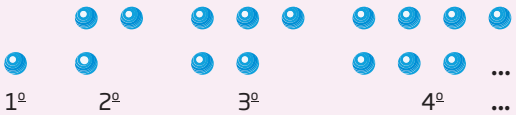
A expressão que determina os termos dessa sequência é n^2.

Portanto, o 50º termo é 2 500 (50^2).

Junte-se a um colega e resolvam estes problemas:

a) Dada a sequência: 11, 12, 13, 14, ..., escrevam a expressão que indica o enésimo termo dela e, depois, determinem o 100º termo. $(10 + n)$; 110

b) Observem a sequência abaixo e calculem o 1 000º termo. 1 999

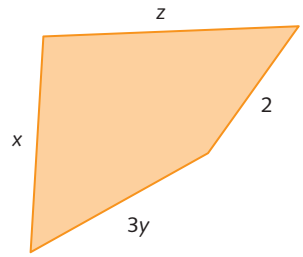


LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

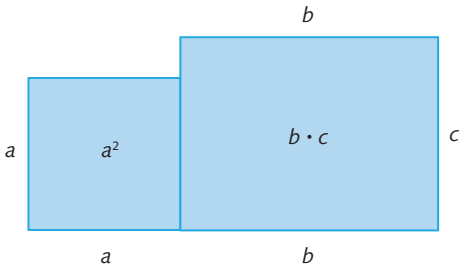
3 Termos algébricos

Observe as figuras a seguir.



O perímetro desta figura é igual a $x + 3y + z + 2$.

LUIZ RUBIO



A área desta figura é igual a $a^2 + b \cdot c$.

Cada parcela de uma expressão algébrica é denominada **termo algébrico**. Assim:

- a expressão $x + 3y + z + 2$ apresenta quatro termos;
- a expressão $a^2 + b \cdot c$ possui dois termos.

Um termo algébrico é formado por duas partes: a parte numérica, denominada **coeficiente**, e a parte com letras, denominada **parte literal**.

Exemplos

- $17a$ — coeficiente: 17; parte literal: a
- $-\frac{3}{2}x^2y$ — coeficiente: $-\frac{3}{2}$; parte literal: x^2y
- $a^2b^3c^4$ — coeficiente: 1; parte literal: $a^2b^3c^4$

Observação

Um número racional em uma expressão é considerado um termo algébrico sem parte literal.

Exemplo

$5m - 3$
- $5m$: coeficiente: 5; parte literal: m
- -3: coeficiente: -3; parte literal: não tem

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Termos semelhantes

Termos algébricos que têm a mesma parte literal são chamados de **termos semelhantes**. Assim, $6ab$ e $-8ab$ são termos semelhantes, pois apresentam a mesma parte literal (ab).

Redução de termos semelhantes

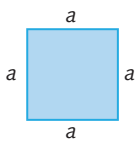
Podemos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação no cálculo das expressões algébricas.

Como $3 \cdot (7 - 5) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 5$, também podemos dizer que $3 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 3 \cdot (7 - 5)$.

A mesma relação pode ser aplicada nas expressões algébricas. Veja:

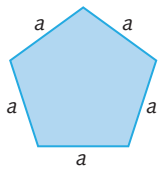
$$2a + 3a = a \cdot (2 + 3)$$

Observe como podemos determinar o perímetro de alguns polígonos regulares usando essa propriedade.



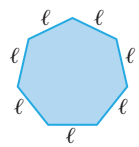
quadrado

$a + a + a + a =$
$= (1 + 1 + 1 + 1) \cdot a = 4a$



pentágono

$a + a + a + a + a =$
$= (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot a = 5a$



heptágono

$\ell + \ell + \ell + \ell + \ell + \ell + \ell =$
$= (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot \ell = 7\ell$

Para reduzir os termos semelhantes a um único termo, podemos adicionar ou subtrair os coeficientes e manter a parte literal. Veja:

adicionamos os coeficientes

$5 \cdot a + 9 \cdot a = (5 + 9)a = 14a$

mantemos a parte literal

subtraímos os coeficientes

$9 \cdot x - 11 \cdot x = (9 - 11)x = -2x$

mantemos a parte literal

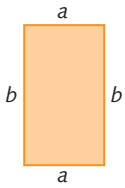
Exemplos

- $7ab - 2ab = (7 - 2)ab = 5ab$
- $11x^2y^3 + 3x^2y^3 = (11 + 3)x^2y^3 = 14x^2y^3$
- $3mn - 9mn + 5mn = (3 - 9 + 5)mn = -mn$
- $0{,}25abc - 2abc + 0{,}3abc = (0{,}25 - 2 + 0{,}3)abc = -1{,}45abc$
- $y - \frac{y}{4} + \frac{3y}{2} = \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)y = \frac{9}{4}y$

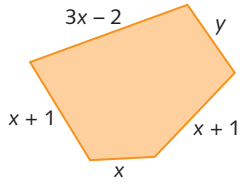
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LUIZ RUBIO

Agora, observe os polígonos a seguir e a expressão algébrica que representa o perímetro de cada um deles.



$a + b + a + b =$
$= a + a + b + b =$
$= 2a + 2b$



LUIZ RUBIO

$x + 1 + x + x + 1 + y + 3x - 2 =$
$= x + x + x + 3x + y + 1 + 1 - 2 =$
$= 6x + y$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Determine o coeficiente e a parte literal de cada um dos termos algébricos abaixo.

a) $15ab$ 15; ab

b) $47xy$ 47; xy

c) $-\frac{3a^2b}{2}$ $-\frac{3}{2}$; a^2b

d) $-15xy^3k^4$ -15; xy^3k^4

e) $\frac{17}{4}cd$ $\frac{17}{4}$; cd

f) $-y$ -1; y

g) $-\frac{3x}{5}$ $-\frac{3}{5}$; x

h) $7c$ 7; c

2 Analise as afirmações abaixo e copie no caderno apenas as verdadeiras. alternativas **b**, **d**

a) $3x + 4y + 6z$ possui seis termos.

b) x^2 é a parte literal do termo $6x^2$.

c) $4x$ é a parte literal do termo $4x + 4$.

d) 5 é o coeficiente do termo $5a^3b^6$.

e) w é a parte literal da expressão $5w^3 + 3w + 1$.

3 Reduza os termos semelhantes de cada expressão a seguir.

a) $5x - 2x + 6x + 8x$ $17x$

b) $10ab - 5 + ab - 7ab$ $4ab - 5$

c) $5a - 3b - 6a - a + 5b$ $-2a + 2b$

d) $0{,}8y - 2{,}4y + y - \frac{y}{4}$ $-\frac{17}{20}y$

e) $10k - 9k - 12k - 3k + 10k$ $-4k$

f) $12y + 23y - 13y - y$ $21y$

g) $8x - 12x + 20x - 32x$ $-16x$

h) $7y - 3z + (5w - w + z)$ $7y - 2z + 4w$

4 Nos aeroportos do Brasil, as medidas máximas permitidas para uma bagagem de mão são: 23 cm × 40 cm × 55 cm.

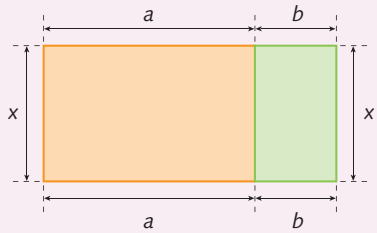
HORIYAN/SHUTTERSTOCK

Uma bagagem de mão não deve ter massa superior a 5 kg.

Dados obtidos em: <www2.anac.gov.br/dicasanac/pdf/novo/anac_panfleto_bagagem.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2015.

Qual é a expressão algébrica que representa a medida do volume da mala acima? Determine a medida do volume máximo permitido, em centímetro cúbico, de acordo com as dimensões apresentadas.
xyz; 50 600 cm³

5 Escreva, no caderno, as expressões algébricas que representam o perímetro e a área da figura abaixo. perímetro: $2 \cdot (a + b + x)$ área: $(a + b) \cdot x$



GUILHERME CASAGRANDI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Sentenças matemáticas

A linguagem das palavras se expressa através de sentenças. Veja:

> *Os números governam o mundo.*
> Platão, filósofo e matemático grego.
>
> *O livro da natureza foi escrito exclusivamente com figuras e símbolos matemáticos.*
> Galileu, físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano.

As sentenças que envolvem números são chamadas de sentenças matemáticas. Observe:

I. Doze mais quinze é igual a vinte e sete.
II. Vinte é maior que treze.
III. Trinta é diferente de três.
IV. Vinte e um é igual ao triplo de um número a.
V. Cinco quartos de um número x é menor que um.
VI. Sete terços é maior ou igual a dois.

Essas sentenças também podem ser escritas na linguagem matemática. Veja:

I	II	III
$12 + 15 = 27$	$20 > 13$	$30 \neq 3$

IV	V	VI
$21 = 3 \cdot a$	$\frac{5}{4} \cdot x < 1$	$\frac{7}{3} \geqslant 2$

As sentenças matemáticas podem ser verdadeiras ou falsas. Observe:

- $2 + 8 = 6 + 4$ ⟶ verdadeira
- $3 + 7 < 7 + 3$ ⟶ falsa
- $4 + 5 > 3^2$ ⟶ falsa
- $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ ⟶ verdadeira

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva em linguagem matemática as seguintes sentenças matemáticas:

a) O dobro de um número b é igual a 16. $2 \cdot b = 16$

b) A diferença entre os número x e y é igual a 15. $x - y = 15$

2 Escreva em seu caderno como se leem as sentenças matemáticas.

a) $8 + 3 = 11$ b) $20 : 5 - 2 = 2$ c) $(5 - 7)^2 < 8$ d) $\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$

3 Indique em seu caderno as sentenças matemáticas verdadeiras. alternativas **c**, **d**

a) $-5 < -9$ b) $(-3)^2 = -9$ c) $8 - (-5) = 13$ d) $9 \cdot 5 = 5 \cdot 3^2$

2. a) Oito mais três é igual a onze.
b) Vinte dividido por cinco menos dois é igual a dois.
c) O quadrado de cinco menos sete é menor que oito.
d) Dois terços é maior que um quarto.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Reescreva as frases a seguir substituindo cada ■ por uma das expressões do quadro abaixo.

expressão algébrica	termo algébrico
termos semelhantes	valor numérico

a) Termos algébricos que têm a mesma parte literal são chamados ■. termos semelhantes

b) Uma expressão matemática formada por números e letras ou somente por letras é chamada de ■. expressão algébrica

c) ■ é cada uma das parcelas de uma expressão algébrica. Termo algébrico

d) ■ é o resultado das operações efetuadas em uma expressão algébrica após a substituição das variáveis por números. Valor numérico

2 Explique o que significa reduzir termos semelhantes. Reduzir a um único termo os termos que apresentam a mesma parte literal, adicionando ou subtraindo os coeficientes e mantendo a parte literal.

3 Relacione cada expressão algébrica a seu valor numérico, sendo $x = 2$ e $y = -1$.

A – III; B – I; C – IV; D – II

A	$2x + y$	I	11
B	$3x - 5y$	II	1
C	$x^2 + y^2$	III	3
D	$(x + y)^2$	IV	5

Aplicando

1 Escreva uma expressão algébrica para representar:

a) a soma de sete com o quádruplo de um número; $7 + 4x$

b) a sexta parte de um número; $\frac{x}{6}$

c) a décima parte de um número; $\frac{x}{10}$

d) o produto de um número pela sua sétima parte; $x \cdot \frac{x}{7}$

e) a soma de um número com seus três quintos; $x + \frac{3x}{5}$

f) a diferença entre o triplo e a metade de um número; $3x - \frac{x}{2}$

g) a metade da soma de dois números consecutivos; $\frac{x + x + 1}{2}$

h) o quíntuplo da soma de um número com os seus três quartos. $5 \cdot \left(x + \frac{3}{4}x\right)$

2 No caderno, indique as sentenças verdadeiras. alternativas **a**, **b**, **c** e **d**

a) $2 + 14 = 2^4$

b) $3 - 2 < 2 + 8$

c) $2 - 1 \neq 0 + 3$

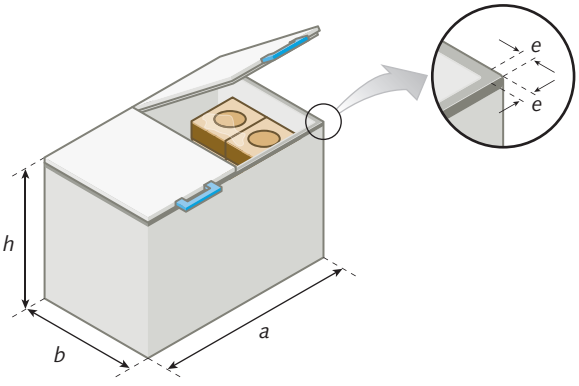
d) $54 - 3 = 50 + 1$

3 Teca tem 32 anos. Escreva no caderno uma expressão algébrica que representa a idade que ela teve há x anos, sendo x um número natural. $32 - x$

DESAFIO

Observe a figura abaixo e determine a expressão algébrica da capacidade de um *freezer* de dimensões externas a, b, h e paredes com espessura e.

$(a - 2e) \cdot (b - 2e) \cdot (h - 2e)$



GUILHERME CASAGRANDI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Paulo criou uma máquina de operações matemáticas. Na situação abaixo, ele programou a máquina para receber um número n e devolver um número representado por $\frac{7n}{2} + 12 - n$.

JOSÉ LUÍS JUHAS

$\frac{5n}{2} + 12$

a) Qual é a forma mais simples de representar o número que saiu da máquina?

b) Nessa situação, se o número 30 for inserido na máquina, que número sairá? 87

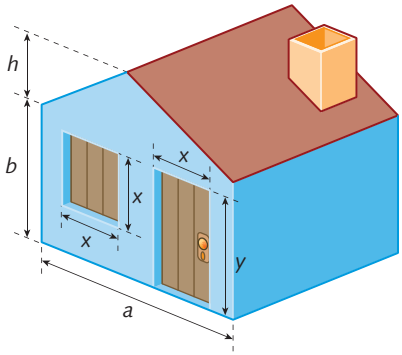
5 Em uma fábrica de parafusos o custo fixo mensal é de R$ 2 000,00, além do custo de R$ 1,20 por parafuso produzido (x).

a) Como podemos representar o custo mensal total (C) da produção de x parafusos?
$C = 2\,000 + 1{,}20x$

b) Se, em determinado mês, a fábrica produzir 10 000 parafusos, qual será o custo total? E o custo real de cada parafuso?
R$ 14 000,00; R$ 1,40

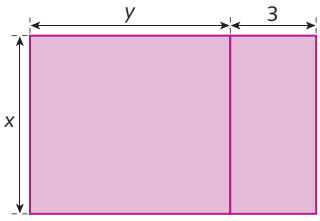
DESAFIO

Determine a expressão algébrica que representa a área da frente da casa (exclua a porta e a janela). $a \cdot b + \frac{ah}{2} - x^2 - xy$



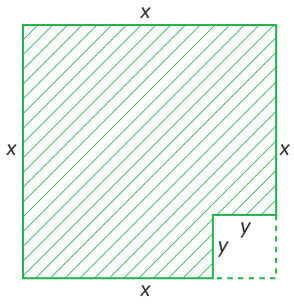
GUILHERME CASAGRANDI

6 Escreva, no caderno, a expressão algébrica que representa a área total da figura ao lado. $x \cdot (y + 3)$



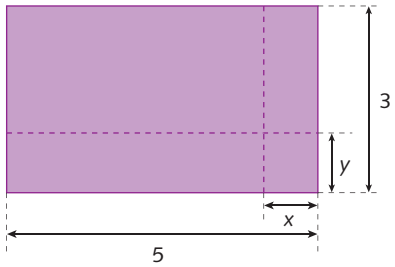
GUILHERME CASAGRANDI

7 Escreva, no caderno, a expressão algébrica correspondente à área da região hachurada da figura abaixo. $x^2 - y^2$



GUILHERME CASAGRANDI

8 **(Enem)** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x) \cdot (3 - y)$.



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por: alternativa **e**

a) $2xy$
b) $15 - 3x$
c) $15 - 5y$
d) $-5y - 3x$
e) $5y + 3x - xy$

9 Reduza os termos semelhantes.

a) $6x + 5y - (2x + 3y) - 8y$ $4x - 6y$

b) $6ab - 2b + 4a - 6b + ab$ $7ab + 4a - 8b$

c) $0{,}7x - 0{,}5y + 0{,}3x - 1{,}4y + y$ $x - 0{,}9y$

d) $7a - (3a + 2b - 5a) - 8b$ $9a - 10b$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

4 EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

A **máquina envasadora** de esteira de uma indústria de laticínios consegue encher de 3 000 a 5 000 frascos por hora.

- Se uma dessas máquinas funcionar 12 horas por dia poderá, em 5 dias, envasar no mínimo quantas garrafas? E no máximo?
  180 000 garrafas; 300 000 garrafas
- Escreva no caderno uma expressão algébrica para determinar a produção máxima em relação ao número de horas de funcionamento (x) dessa máquina. $5\,000x$

Máquina envasadora

Usada para engarrafar, envasar ou envasilhar produtos.

JIANAN YU/REUTERS/LATINSTOCK

A eficácia da esterilização da embalagem tem influência considerável no tempo de conservação dos produtos envasados e grande importância na sequência do tratamento asséptico, assim como nos procedimentos de envase.

Linha de produção em fábrica de laticínios na China, em setembro de 2008.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Analise a situação a seguir:

Na subida de uma montanha morava um sábio. De todos os que passavam, o sábio cobrava uma taxa de x moedas. Recebia o pagamento e verificava quantas moedas o viajante ainda possuía. Então, entregava a ele esse mesmo valor, dobrando a quantidade de moedas que havia sobrado ao viajante.

Um camponês saiu de casa com y moedas e teve de subir a montanha três vezes. Na segunda vez em que subiu, ele tinha a mesma quantidade de moedas que ficou na primeira vez e, na terceira vez, tinha a mesma quantidade de moedas que ficou na segunda vez.

JOSÉ LUÍS JUHAS

Copie o quadro no caderno e complete-o.

É interessante e produtivo que os alunos façam esta atividade em grupo.

MODELO

	Passagem do camponês pelo sábio		
	1ª vez	2ª vez	3ª vez
Tinha	y	$2y - 2x$	$4y - 6x$
Deu	x	x	x
Sobrou	$y - x$	$2y - 3x$	$4y - 7x$
Ficou com	$2y - 2x$	$4y - 6x$	$8y - 14x$

Agora, responda:

- Se o sábio cobrasse 8 moedas de cada viajante e, no início, esse camponês tivesse 14 moedas, quantas moedas ele teria no final? nenhuma
- Considere que no final o camponês ficou com a mesma quantidade de moedas do início e, nesse caso, o sábio cobrou 4 moedas em cada passagem. Escreva uma sentença para representar essa situação e, depois, descubra a quantidade de moedas que o camponês tinha no início. $8y - 56 = y$; 8 moedas

Incentive os alunos a criar suas próprias estratégias em descobrir o valor de y.

Podemos resolver muitos problemas com a utilização de sentenças matemáticas que expressam igualdades.

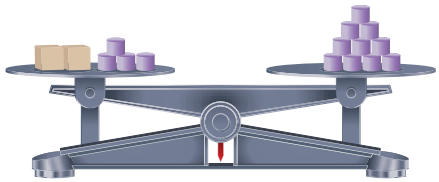
Neste capítulo, vamos ver que esse tipo de sentença é chamado de **equação** e vamos estudar as **equações do 1º grau com uma incógnita**.

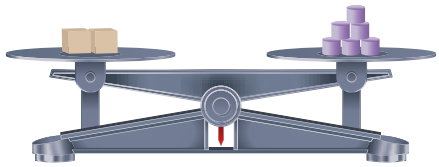
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Equações

Observe as situações a seguir.

- As balanças de dois pratos **estão equilibradas**. Veja:





LUIZ RUBIO

Por meio do equilíbrio das balanças, podemos verificar as igualdades:

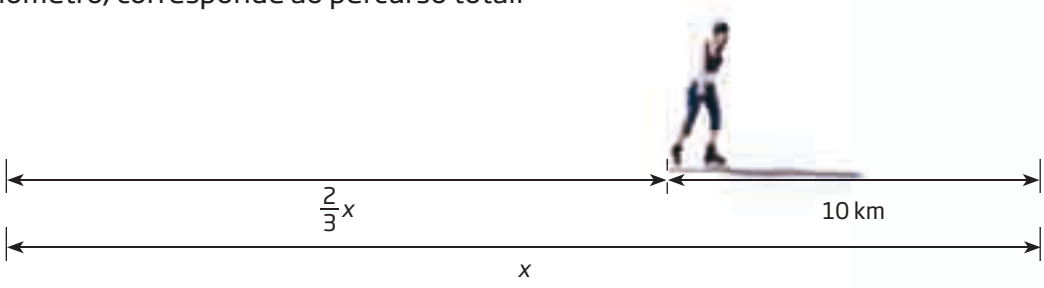
2 ▭ e 4 ▮ equilibram 10 ▮ 2 ▭ equilibram 6 ▮

Considerando que a massa de cada ▮ equivale a 1 quilograma e a massa de cada ▭ equivale a x quilogramas, podemos escrever:

$2x + 4 = 10$ $2x = 6$

Assim, escrevemos duas **sentenças matemáticas** que expressam igualdades. Em cada uma delas, há um elemento desconhecido: x.

- Luana percorreu $\frac{2}{3}$ da distância total de uma pista em uma hora. Faltam 10 km para ela concluir o percurso. Observe na figura a seguir a representação do problema, em que x, em quilômetro, corresponde ao percurso total.



WAGNER WILLIAM

A sentença matemática $\frac{2x}{3} + 10 = x$ representa a situação acima. Essa sentença é expressa por uma igualdade e apresenta um elemento desconhecido: x.

Sentenças como essa são chamadas de **equações**. A letra x é o valor desconhecido dessas equações.

Equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade e apresenta pelo menos um valor desconhecido representado por uma letra denominada **incógnita**.

Equação

Tem o prefixo *equa*, que em latim quer dizer "igual".

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

- $2x + 8 = 0$
  é uma equação, e a incógnita é x.
- $5y - 4 = 6y + 8$
  é uma equação, e a incógnita é y.
- $3a - b - c = 0$
  é uma equação, e as incógnitas são a, b e c.

Cuidado!

Não são equações:

- $4 + 8 = 7 + 5$ (Não tem incógnita.)
- $x - 5 < 3$ (Não é igualdade.)
- $5 \neq -2$ (Não é igualdade.)

Agora, vamos considerar a equação: $2z - 8 = 3z - 10$. Nessa equação, a incógnita é z.

A expressão que está à esquerda do sinal **=** denomina-se **1º membro**, e a expressão que está à direita do sinal **=** denomina-se **2º membro**.

$$\underbrace{2z - 8}_{\text{1º membro}} = \underbrace{3z - 10}_{\text{2º membro}}$$

Equação do 1º grau com uma incógnita

Uma equação é de 1º grau se o maior expoente da incógnita for igual a 1.

Exemplos

- $2z + 1 = 0$
  é uma equação de 1º grau, pois o expoente da incógnita z é 1.
- $3x^2 - 5 = 16x$
  não é uma equação de 1º grau, pois o maior expoente da incógnita x é diferente de 1.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Identifique, no caderno, as sentenças que representam equações do 1º grau. alternativas **c** e **e**

a) $2x + 5 < 3$
b) $7 - 3 = 2 + 2$
c) $8 = 6y - 4$
d) $x - 1 \neq 0$
e) $3x + 7 = \frac{1}{2}$
f) $m - 8 > 5$
g) $2x^3 = -16$
h) $\frac{1}{3} \neq -2x$
i) $0 = 5x^4 + 2y$
j) $15 - 2x^2 < x^2 - 3$

2 No caderno, identifique as equações do 1º grau. alternativas **a**, **b** e **d**

a) $2x - x = 5 - 7$
b) $x - 8 = 0$
c) $x^2 - 2 = 2$
d) $4x - 4 = 8$

3 Observe a equação $2y - 6 = 4 + y$ e responda às questões:

a) Qual é o 1º membro? $2y - 6$
b) Qual é o 2º membro? $4 + y$
c) Qual é a incógnita dessa equação? y

2 Raiz de uma equação

A incógnita de uma equação pode assumir diversos valores, mas a sentença obtida pode não ser verdadeira para alguns desses valores. Se um desses valores torna a sentença verdadeira, ele é chamado de **raiz** da equação.

Podemos verificar se um número é ou não raiz de uma equação substituindo a incógnita por esse número.

Exemplos

- Considere a equação $x + 2 = 5$. Substituindo x por 3, obtemos uma sentença verdadeira:

$$3 + 2 = 5$$

Portanto, o número 3 é a raiz da equação $x + 2 = 5$.

- Verificar se o número 2 é raiz das equações.

I. $2x - 3 = 1$

$2 \cdot 2 - 3 = 1$

$4 - 3 = 1$

$1 = 1 \longrightarrow$ sentença verdadeira

Logo, 2 é raiz da equação $2x - 3 = 1$.

II. $2x + 1 = 6$

$2 \cdot 2 + 1 = 6$

$4 + 1 = 6$

$5 = 6 \longrightarrow$ sentença falsa

Logo, 2 não é raiz da equação $2x + 1 = 6$.

Conjunto universo e solução de uma equação

O **conjunto universo** é formado por todos os valores que uma incógnita pode assumir, e é indicado por U. Observe a situação a seguir.

GEORGE TUTUMI

Quantos são os irmãos de Marcos?

Para representar a fala de Marcos em linguagem matemática, escrevemos: $2x - 3 = 5$

Como x representa a quantidade de irmãos que Marcos tem, a incógnita dessa equação só pode assumir valores naturais. Por isso, nesse caso, $U = \mathbb{N}$.

Observe que, substituindo x por 4 na equação $2x - 3 = 5$, obtemos uma sentença verdadeira. Como 4 é um número natural, dizemos que 4 é solução dessa equação.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A **solução** de uma equação corresponde apenas aos valores do conjunto universo que tornam a sentença verdadeira. Resolver uma equação é o mesmo que encontrar sua solução.

Exemplo

O dobro de um número natural x adicionado a 5 é igual a 10. Em linguagem matemática, temos:
$2x + 5 = 10$

Como x é um número natural, pode assumir qualquer valor do conjunto $\mathbb{N}$; logo, nesse caso, $U = \mathbb{N}$.

Observe que, substituindo x por 2,5 na equação $2x + 5 = 10$, obtemos uma sentença verdadeira:
$2 \cdot 2{,}5 + 5 = 10$

Entretanto, como 2,5 não é um número natural, a equação não tem solução nesse conjunto universo.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Verifique se o número 2 é raiz das seguintes equações:

a) $3x + 10 = 4x + 8$ sim

b) $\frac{x}{2} + 5 = \frac{5x}{3} - 2$ não

c) $3x^x - 5 = 0$ não

d) $15\sqrt{x+2} = 30$ sim

2 Determine mentalmente a solução da equação $x + 7 = 12$, considerando o conjunto universo indicado em cada item.

a) $U = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ não tem solução

b) $U = \mathbb{Z}$ 5

3 Determine mentalmente a solução de cada equação sendo $U = \mathbb{Q}$.

a) $x - 8 = 0$ 8

b) $\frac{x}{4} = 3$ 12

c) $6x = -18$ -3

d) $x + \frac{3}{4} = 0$ $-\frac{3}{4}$

e) $x - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 1

f) $x + 8 = 0$ -8

g) $x + \frac{1}{4} = 0$ $-\frac{1}{4}$

h) $6x = -6$ -1

4 Calcule mentalmente e escreva em seu caderno a raiz das equações abaixo.

a) $x + 5 = 12$ $x = 7$

b) $-2a = 6$ $a = -3$

c) $x^2 = 64$ $x = +8$ ou $x = -8$

d) $y + 8 = 5$ $y = -3$

e) $\frac{b}{5} = -4$ $b = -20$

f) $2x = -3$ $x = -\frac{3}{2}$

3 Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita

Equações equivalentes

Considere as equações $x - \frac{1}{2} = 0$ e $x + 2 = \frac{5}{2}$, sendo $U = \mathbb{Q}$. O número $\frac{1}{2}$ é a raiz dessas duas equações. Veja:

$x - \frac{1}{2} = 0$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$0 = 0 \longrightarrow$ sentença verdadeira

$x + 2 = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} \longrightarrow$ sentença verdadeira

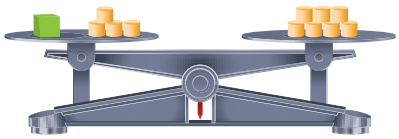
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

As equações $x - \frac{1}{2} = 0$ e $x + 2 = \frac{5}{2}$ são **equações equivalentes**, pois têm a mesma raiz em U.

Quando duas equações têm o mesmo conjunto universo e as mesmas raízes, elas são chamadas de **equações equivalentes**.

Situação 1

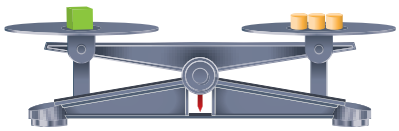
A balança da ilustração abaixo está em equilíbrio. No prato da esquerda, foram colocados 4 de 1 quilograma cada um e um de massa x quilograma. No prato da direita, foram colocados 7 de 1 quilograma cada um. Qual é a massa de ?



A situação pode ser representada pela equação:

$$x + 4 = 7$$

Retirando 4 de 1 quilograma de cada prato, a balança continua equilibrada. Veja:



Nesse caso, podemos representar a situação pela equação:

$$x + 4 - 4 = 7 - 4$$

ou seja, $x = 3$

Portanto, um tem massa igual a 3 quilogramas.

Quando uma mesma quantidade é adicionada aos dois membros de uma equação ou subtraída dos dois membros de uma equação, obtém-se uma equação equivalente à equação dada. Esse é o **princípio aditivo das igualdades**.

Na situação acima, resolvemos a equação $x + 4 = 7$ aplicando o princípio aditivo das igualdades.

Exemplo

Resolver a equação $x - 6 = 10$, sendo $U = \mathbb{Q}$, utilizando o princípio aditivo das igualdades.

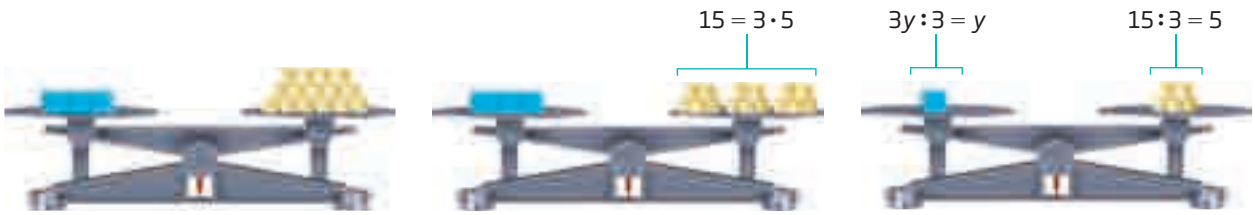
$x - 6 = 10$

$x - 6 + 6 = 10 + 6$ ← Adicionamos 6 unidades a cada membro.

$x = 16$

Situação 2

A balança da ilustração está em equilíbrio. No prato da esquerda foram colocados 3 de y quilograma cada um. No prato da direita foram colocados 15 de 1 quilograma cada um. Veja:



$3y = 15$ $\qquad$ $3y = 3 \cdot 5$ $\qquad$ $y = 5$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LUIZ RUBIO

LUIZ RUBIO

Multiplicando ou dividindo os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à equação dada. Esse é o **princípio multiplicativo das igualdades**.

Resolvendo a equação $3y = 15$ utilizando o princípio multiplicativo das igualdades, temos:

$3y = 15$

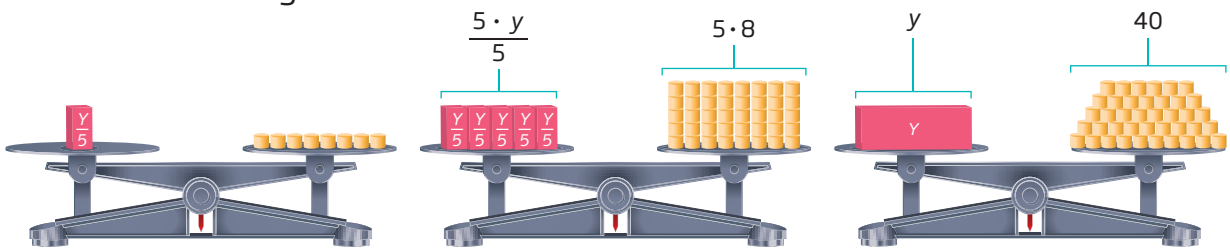
$\frac{3y}{3} = \frac{15}{3}$ ← Dividimos cada membro por 3.

$y = 5$

Portanto, cada 🟦 tem massa igual a 5 quilogramas.

Exemplo

Resolver a equação: $\frac{y}{5} = 8$, sendo $U = \mathbb{Q}$.



LUIZ RUBIO

$\frac{y}{5} = 8$ $\qquad$ $\frac{5 \cdot y}{5} = 5 \cdot 8$ $\qquad$ $y = 40$

Ou seja:

$\frac{y}{5} = 8$

$\frac{y}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 8 \cdot 5$ ← Multiplicamos cada membro por 5.

$y = 40$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Verifique os itens nos quais as equações, em um mesmo conjunto universo, são equivalentes. alternativas **b** e **c**

a) $x + 5 = 10$ e $x = 6$

b) $x - 2 = 7$ e $x = 9$

c) $2x - 4 = 12$ e $x = 8$

2 Escreva, no caderno, uma equação equivalente a cada equação e determine o valor de cada incógnita. Considere $U = \mathbb{Q}$.

a) $x + 5 = 21$ $x = 16$

b) $y - 3 = 100$ $y = 103$

c) $x + 17 = 10$ $x = -7$

d) $x - 3 = 10$ $x = 13$

e) $-3y = 5$ $y = -\frac{5}{3}$

f) $\frac{x}{20} = 5$ $x = 100$

g) $2x = -\frac{5}{3}$ $x = -\frac{5}{6}$

h) $2x = -15$ $x = -\frac{15}{2}$

i) $\frac{x}{8} = -3$ $x = -24$

j) $\frac{3x}{2} = 10$ $x = \frac{20}{3}$

3 Resolva as equações abaixo e indique as equivalentes. Considere $U = \mathbb{Q}$.

a) $13 - \frac{x}{2} = \frac{25}{2}$ 1

b) $3x - 5 = 7$ 4

c) $6x + 4 = 10$ 1

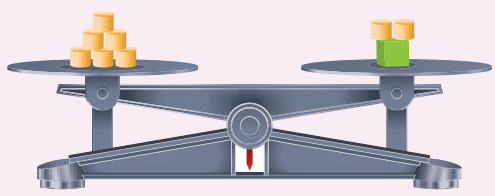
d) $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$ 5

e) $6 + 2x = 11 + x$ 5

f) $18 - 4x = 2$ 4

são equivalentes: **a** e **c**, **b** e **f** e **d** e **e**.

4 A balança da ilustração está em equilíbrio. Determine a massa, em quilograma, de cada 🟧, sabendo que cada 🟩 tem massa igual a 200 gramas. 0,05 quilograma



LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resoluções

Como vimos, para resolver uma equação, fazemos operações aplicando os princípios aditivo e multiplicativo das igualdades, de modo que possamos obter equações equivalentes cada vez mais simples, até encontrar as soluções da equação. Veja mais exemplos.

- Vamos resolver a equação $3x - 5 = x + 7$, sendo $U = \mathbb{Z}$.

$3x - 5 + 5 = x + 7 + 5$ ← Adicionamos 5 unidades a cada membro da equação (princípio aditivo das igualdades).

$3x = x + 12$

$3x - x = x + 12 - x$ ← Subtraímos x de cada membro da equação (princípio aditivo das igualdades).

$2x = 12$

$2x \cdot \frac{1}{2} = 12 \cdot \frac{1}{2}$ ← Multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{1}{2}$ (princípio multiplicativo das igualdades).

$x = 6$

Como 6 é um número inteiro, 6 é a solução da equação.

- Vamos resolver a equação $\frac{2x}{5} - 4 = x$, sendo $U = \mathbb{Z}$.

$\left(\frac{2x}{5} - 4\right) \cdot 5 = x \cdot 5$ ← Multiplicamos os dois membros da equação por 5 (princípio multiplicativo das igualdades).

$2x - 20 = 5x$

$2x - 20 - 2x = 5x - 2x$ ← Subtraímos $2x$ de cada membro da equação (princípio aditivo das igualdades).

$-20 = 3x$

$-20 \cdot \frac{1}{3} = 3x \cdot \frac{1}{3}$ ← Multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{1}{3}$ (princípio multiplicativo das igualdades).

$-\frac{20}{3} = x$

$x = -\frac{20}{3}$

Como $-\frac{20}{3}$ não é um número inteiro, a equação não tem solução em $\mathbb{Z}$.

Observação

Se resolvermos a equação $\frac{2x}{5} - 4 = x$, sendo $U = \mathbb{Q}$, $-\frac{20}{3}$ será solução, pois $-\frac{20}{3}$ é um número racional.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- Agora, vamos resolver a equação $\frac{3x}{5} - 1 = \frac{x}{2}$, sendo $U = \mathbb{Z}$.

$\frac{6x}{10} - \frac{10}{10} = x \cdot \frac{5}{10}$ ← Usando frações equivalentes, escrevemos os termos da equação com o mesmo denominador.

$\left(\frac{6x}{10} - \frac{10}{10}\right) \cdot 10 = \left(x \cdot \frac{5}{10}\right) \cdot 10$ ← Multiplicamos os dois membros da equação por 10 (princípio multiplicativo das igualdades).

$6x - 10 = 5x$

$6x - 10 - 5x = 5x - 5x$ ← Subtraímos $5x$ de cada membro da equação (princípio aditivo das igualdades).

$x - 10 = 0$

$x - 10 + 10 = 0 + 10$ ← Adicionamos 10 unidades a cada membro da equação (princípio aditivo das igualdades).

$x = 10$

Como 10 é um número inteiro, 10 é a solução dessa equação.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Resolva as equações e obtenha a solução de cada uma, sabendo que $U = \mathbb{Q}$.

a) $3x - 9 = 9$ $x = 6$

b) $x - 5 = -7$ $x = -2$

c) $y - 6 = 5y + 8$ $y = -\frac{7}{2}$

d) $10x = 20 + 9x$ $x = 20$

e) $2x + 5 - x = 5 - 3x$ $x = 0$

f) $2m + 6 = m$ $m = -6$

g) $2x + 1 = 15$ $x = 7$

h) $5 - x - 20 = 5x - 10 - 7x$ $x = 5$

i) $x + 6 = 2 - 3x$ $x = -1$

2 Sabendo que $U = \mathbb{Z}$, resolva as equações.

a) $-40 = -10x$ $x = 4$

b) $3x = -45 - 2x$ $x = -9$

c) $6(x + 3) - 2(x - 5) = 20$ $x = -2$

d) $-18 = 2x + 15$ Não tem solução em $\mathbb{Z}$.

e) $2(x - 1) - 1 = 8$ Não tem solução em $\mathbb{Z}$.

f) $2(x - 7) - 4(5 - x) = 2$ $x = 6$

3 Sabendo que $U = \mathbb{Q}$, obtenha o valor da incógnita de cada equação.

a) $\frac{2x}{5} - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{10}$ $x = -\frac{1}{4}$

b) $2m - \frac{7}{5} - \frac{m}{10} = \frac{1}{2}$ $m = 1$

c) $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} = \frac{3y}{4} - 6$ $y = -72$

d) $\frac{3y}{2} - \frac{3}{4} = 1 - 2y$ $y = \frac{1}{2}$

4 Sabendo que $U = \mathbb{Q}$, resolva as equações.

a) $2(x + 3) = 30$ $x = 12$

b) $8 - 2(x + 5) = 5$ $x = -\frac{7}{2}$

c) $3(y - 1) - 4(y - 2) = 6$ $y = -1$

d) $2(5y + 1) = 27$ $y = \frac{5}{2}$

e) $2y - 3(y - 1) = 8 - 2(y - 2)$ $y = 9$

f) $6x - 5(1 - x) = 10x + 6$ $x = 11$

g) $3(2x + 4) = 4(x + 6)$ $x = 6$

5 Sabendo que $U = \mathbb{Q}$, resolva as equações e responda: x é maior ou menor que y?

$\frac{5x}{2} - \frac{1}{4} = 8$ $x = \frac{33}{10}$ e $y = -2$; logo, x é maior que y.

$\frac{y}{3} + \frac{y + 1}{2} = \frac{5}{6} + y$

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Resolução de problemas

Alguns problemas podem ser resolvidos se escrevermos em linguagem matemática as sentenças dadas. Observe a seguir como os problemas foram resolvidos com o uso de equações.

1º problema

Observe o diálogo a seguir e determine a idade de Fábio e de seu avô, Jorge.

RONALDO BARATA

Podemos considerar que Fábio tem x anos e Jorge, $x + 42$ anos.

Com base na informação de que, juntos, eles têm 66 anos, podemos escrever a seguinte equação:

$x + (x + 42) = 66$

Depois, resolvemos a equação:

$x + (x + 42) = 66$

$2x + 42 = 66$

$2x = 66 - 42$

$2x = 24$

$x = \frac{24}{2}$

$x = 12$

Logo, as idades são:

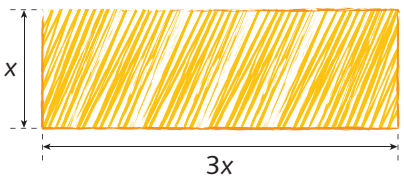
- Fábio: $x = 12$
- Jorge: $x + 42 = 12 + 42 = 54$

Portanto, Fábio tem 12 anos, e Jorge, 54 anos.

2º problema

Um terreno retangular tem 144 m de perímetro. O comprimento do terreno tem o triplo da medida de sua largura. Determine a área do terreno.

Observe ao lado a representação desse terreno. Considerando que o terreno tem largura de medida x, o seu comprimento é igual a $3x$.



GUILHERME CASAGRANDI

Como o perímetro de um polígono é igual à soma das medidas de seus lados, podemos escrever:

$x + 3x + x + 3x = 144$

$8x = 144$

$x = \frac{144}{8}$

$x = 18$

Então:

- medida da largura: $x = 18$ (18 m)
- medida do comprimento: $3x = 3 \cdot 18 = 54$ (54 m)
- área: $(54 \cdot 18)\ m^2 = 972\ m^2$

Portanto, a área do terreno é $972\ m^2$.

3º problema

RONALDO BARATA

Luís é um excelente atleta de natação. Ele já conquistou medalhas de ouro, prata e bronze, em um total de 63. Determine o número de medalhas de cada tipo conquistadas por Luís, sabendo que os números são consecutivos e que a maior parte das medalhas conquistadas é de ouro e, a menor, de bronze.

Neste problema, podemos considerar que x corresponde ao número de medalhas de bronze. Então, sabendo que obtemos o consecutivo de um número quando adicionamos 1 unidade a ele, temos:

- número de medalhas de prata: $x + 1$
- número de medalhas de ouro: $x + 2$

Escrevemos a equação que representa o problema e a resolvemos:

$x + x + 1 + x + 2 = 63$

$3x + 3 = 63$

$3x = 63 - 3$

$3x = 60$

$x = \frac{60}{3}$

$x = 20$

Então:

- número de medalhas de bronze: $x = 20$
- número de medalhas de prata: $x + 1 = 20 + 1 = 21$
- número de medalhas de ouro: $x + 2 = 20 + 2 = 22$

Logo, Luís conquistou 22 medalhas de ouro, 21 medalhas de prata e 20 medalhas de bronze.

4º problema

Pedro e Ernesto colheram, juntos, 55 laranjas. Pedro colheu $\frac{4}{7}$ da quantidade colhida por Ernesto. Quantas laranjas Pedro colheu?

Sendo x a quantidade de laranjas colhidas por Ernesto, a quantidade de laranjas colhidas por Pedro é igual a $\frac{4x}{7}$.

Assim:

RONALDO BARATA

$x + \frac{4x}{7} = 55$

$\left(x + \frac{4x}{7}\right) \cdot 7 = 55 \cdot 7$

$7x + \frac{7 \cdot 4x}{7} = 385$

$7x + 4x = 385$

$11x = 385$

$x = \frac{385}{11}$

$x = 35$

Então:

- quantidade de laranjas colhidas por Ernesto: $x = 35$
- quantidade de laranjas colhidas por Pedro: $\frac{4x}{7} = \frac{4}{7_1} \cdot \overset{5}{\cancel{35}} = 20$

Portanto, Pedro colheu 20 laranjas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5º problema

Alberto verificou que a terça parte do número de livros que possui mais 5 é igual a $\frac{4}{9}$ do total desses livros. Quantos livros Alberto possui?

Considerando:

- número de livros que Alberto possui: y
- terça parte do número de livros: $\frac{y}{3}$
- $\frac{4}{9}$ do número de livros: $\frac{4y}{9}$

Escrevemos a equação do problema e a resolvemos:

$$\frac{y}{3} + 5 = \frac{4y}{9}$$

$$\left(\frac{y}{3} + 5\right) \cdot 9 = \frac{4y}{9} \cdot 9$$

$$9 \cdot \frac{y}{3} + 45 = 4y$$

$$3y + 45 = 4y$$

$$3y - 4y = -45$$

$$-y = -45$$

$$y = 45$$

Logo, Alberto possui 45 livros.

RONALDO BARATA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Qual é o número inteiro que adicionado ao seu dobro é igual a 72? 24

2 O triplo de um número natural, aumentado de 15, é igual a 39. Qual é esse número? 8

3 Qual é o número inteiro que adicionado a sua quarta parte é igual a 60? 48

4 A diferença entre os $\frac{2}{3}$ de um número racional e sua metade é igual a 10. Qual é esse número? 60

5 Ana tem cinco anos a mais que Paula. A soma da idade das duas é 35 anos. Qual é a idade de Ana? 20 anos

6 Lúcio e Cândido têm, juntos, massa de 124 kg. Lúcio tem 16 kg a mais que Cândido. Qual é a massa de cada um deles? Lúcio: 70 kg; Cândido: 54 kg

7 Quais são os dois números pares consecutivos cuja soma é 138? 68 e 70

8 Qual é o número inteiro cuja soma com seu sucessor é 73? 36

9 A soma de quatro números naturais consecutivos é 150. Determine-os. 36, 37, 38 e 39

10 A soma de dois números inteiros é 103 e a diferença entre o maior e o menor é 23. Quais são esses números? 40 e 63

11 A soma de três números pares consecutivos é 90. Calcule o maior deles. 32

12 Luíza repartiu 460 figurinhas entre André, Breno e Cid, de modo que Breno recebesse o dobro de Cid e André ficasse com 60 figurinhas a mais que Breno. Quantas figurinhas André recebeu? 220 figurinhas

13 Telma comprou uma calça e pagou-a em três prestações. Na primeira prestação, ela pagou a metade do valor da calça, na segunda, a terça parte e, na última, R$ 10,00. Qual foi o valor da calça? R$ 60,00

Lembre-se:
Não escreva no livro!

14. primeiro: R$ 15 000,00; segundo: R$ 10 000,00; terceiro: R$ 5 000,00

14 Em um campeonato de *kitesurf* são oferecidos R$ 30 000,00 aos três primeiros colocados. O primeiro colocado recebe R$ 10 000,00 a mais que o terceiro. O segundo colocado recebe o dobro da quantia do terceiro. Qual é o prêmio de cada um?

FOTOANDREA/SHUTTERSTOCK

O *kitesurf* é praticado com uma prancha e uma pipa, presa ao condutor por meio de cordas.

15 Em uma loja foi vendido um lote de tênis em apenas uma semana. Dois terços deles eram pretos e 72, brancos. Quantos pares de tênis foram vendidos nessa loja na referida semana? 216 pares de tênis

16 Aníbal afirmou: "Daqui a quatro anos, minha idade será o triplo da idade que tinha há 26 anos". Qual é a idade de Aníbal? 41 anos

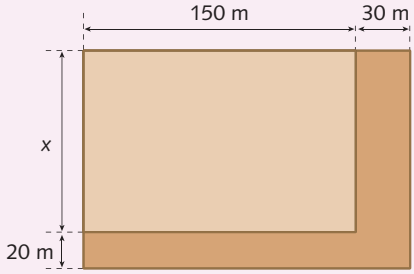
17 Pensei em um número natural, multipliquei por 5, dividi por 4 e subtraí 8, obtendo 12. Em que número pensei? 16

18 O comprimento de um retângulo tem 6 cm a mais que a largura. Seu perímetro é igual ao de um quadrado com 30 cm de lado. Qual é a medida do comprimento do retângulo? 33 cm

19 Um pai tem 40 anos, e seu filho, 10 anos. Quantos anos passarão até que o pai tenha o dobro da idade do filho? 20 anos

20 Um terreno retangular mede 150 m de comprimento. Se o terreno fosse 30 m mais comprido e 20 m mais largo, sua superfície seria 6 600 m² maior. Qual é a medida da largura do terreno? $x = 100$ m

GUILHERME CASAGRANDI



21 Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. Descubra o valor de x no quadrado mágico abaixo e copie-o no caderno, substituindo os ▬ por números. $x = 9$

x 9	▬ 14	$x - 2$ 7
8 ▬	10 $x + 1$	12 ▬
13	6 ▬	11 $x + 2$

MODELO MODELO

22 Com o auxílio de uma calculadora, descubra o resultado de cada item após digitar as teclas indicadas.

a) 5 + = = 10

b) 5 + = = = 15

c) 5 + = = = = 20

d) 5 + = = = = = 25

Agora responda: As etapas apresentadas podem variar de uma calculadora para outra.

Qual será o resultado se você digitar 5 + e:

- a tecla = 10 vezes? 50
- a tecla = n vezes? $5n$

Oriente os alunos que tiverem calculadoras que funcionem de maneira diferente da indicada.

23 Um apartamento tem área total de 40,5 m², compreendendo uma suíte (quarto, banheiro e *hall*), uma cozinha, uma sala e uma varanda. A área do banheiro é o dobro da área do *hall*, e a área do quarto é o triplo da área do banheiro. Sabendo que a cozinha e a varanda têm a mesma área e juntas têm a mesma área da sala e que a sala tem a mesma área da suíte, determine a área de cada um desses ambientes.

quarto: 9 m²; banheiro: 3 m²; *hall*: 1,5 m²; cozinha: 6,75 m²; varanda: 6,75 m²; sala: 13,5 m²

GUILHERME CASAGRANDI

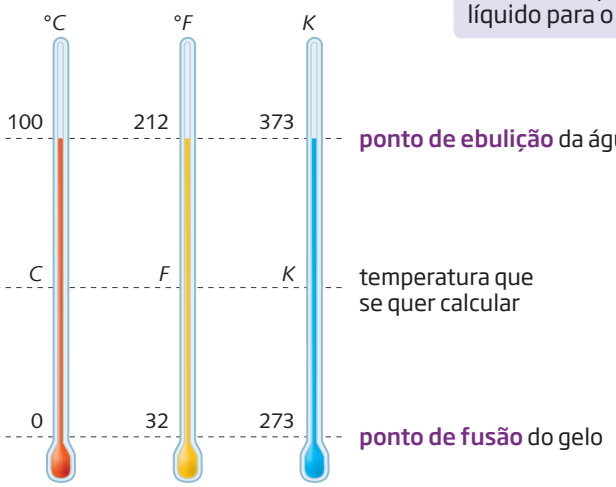
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lendo e aprendendo

Escalas termométricas

As três escalas termométricas mais conhecidas são a Celsius (°C), a Fahrenheit (°F) e a Kelvin (K).

Podemos observar, na figura abaixo, que cada uma das três escalas foi definida de maneira diferente.



ROGÉRIO LOU

Ponto de ebulição

Temperatura em que uma substância passa do estado líquido para o estado gasoso.

Ponto de fusão

Temperatura em que uma substância passa do estado sólido para o estado líquido.

SERGEJ RAZVODOVSKIJ/SHUTTERSTOCK

Termômetro com registro simultâneo da temperatura nas escalas Celsius e Fahrenheit.

Mas existe uma relação entre elas baseada no ponto de ebulição da água e de fusão do gelo: $\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} = \frac{K - 273}{5}$. Assim, é possível fazer conversões de uma para outra escala.

Junte-se a um colega e resolvam as questões a seguir.

1 Calculem o valor das seguintes temperaturas:

a) 68 °F em graus Celsius; 20 °C

b) −10 °C em graus Fahrenheit. 14 °F

2 Qual é a temperatura expressa em graus Fahrenheit cujo número é igual ao empregado em graus Celsius? −40°

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Obmep) Após lançar 2014 vezes uma moeda, Antônio contou 997 caras. Continuando a lançar a moeda, quantas caras seguidas ele deverá obter para que o número de caras fique igual à metade do número total de lançamentos? alternativa **c**

a) 10 c) 20 e) 40
b) 15 d) 30

GEORGE TUTUMI

Interpretação e Identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Qual é a relação entre o número de caras consecutivas e o total de lançamentos ao final do experimento? São iguais.

Plano de resolução

- Escreva uma expressão algébrica que represente o total de caras ao final dos lançamentos. $997 + x$
- Escreva outra expressão algébrica que represente o total de lançamentos. $2014 + x$
- Como você faria para indicar a metade do valor representado pela expressão algébrica anterior? $\frac{2014 + x}{2}$
- Escreva uma equação, relacionado as expressões algébricas criadas. $997 + x = \frac{(2014 + x)}{2}$

Resolução

- Junte-se a um colega.
- Mostre a ele seu plano de resolução e verifique se há ideias comuns entre vocês.
- Discutam as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um dos planos para a execução do processo de resolução.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno. Exemplo de resolução: $997 + x = \frac{(2014 + x)}{2}$

$1994 + 2x = 2014 + x$

$x = 20$

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Explique o que é uma equação. Em seguida, dê um exemplo de equação, identificando sua incógnita. Resposta pessoal.

2 Das equações abaixo, três têm raiz igual a 3. Identifique-as no caderno. A; C e D

A	B	C	D
$7x - 8 = 13$	$-5x - 10 = 5$	$-4x + 8 = -4$	$\frac{x}{2} + 5 = \frac{13}{2}$

3 Como são denominadas as equações que têm a mesma raiz em um mesmo conjunto universo?
equações equivalentes

4 Na resolução de equações aplicamos sempre dois princípios importantes: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo das igualdades.

a) Analise os trechos de resolução abaixo e indique o princípio aditivo usado em cada caso.

$-x = \frac{1}{3} - 6x + \frac{1}{2}$

$-x + 6x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6x + 6x$

aditivo

$5x = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$

$\frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}$

multiplicativo

$-x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - 6x$

$-x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - 6x + \frac{1}{2}$

aditivo

$14x = -2$

$\frac{1}{14} \cdot 14x = -2 \cdot \frac{1}{14}$

multiplicativo

$14x + 18 = 16$

$14x + 18 - 18 = 16 - 18$

aditivo

b) Os trechos apresentados fazem parte da resolução de duas equações. Identifique os trechos equivalentes e escreva no caderno a resolução completa de cada equação. Depois, obtenha a solução de cada uma. 4. b)

I. $14x + 18 = 16$
$14x + 18 - \mathbf{18} = 16 - \mathbf{18}$
$14x = -2$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{14}} \cdot 14x = -2 \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{14}}$
$x = -\frac{1}{7}$

II. $-x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - 6x$
$-x - \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{1}{3} - 6x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
$-x = \frac{1}{3} - 6x + \frac{1}{2}$
$-x + \mathbf{6x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6x + \mathbf{6x}$
$5x = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \cdot 5x = \frac{5}{6} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$
$x = \frac{1}{6}$

Aplicando

1 Sabendo que $U = \mathbb{Q}$, resolva as equações.

a) $2x + (9 - x) = 8 - (3x - 6)$ $x = \frac{5}{4}$

b) $8 \cdot (2x - 1) = 6 \cdot (5x - 2) - 10$ $x = 1$

c) $y - [y - (2 - y) - 1] + 4 = -(-3 - y)$ $y = 2$

d) $2 \cdot (x - 2) - 3 \cdot (1 - x) = 20 - (x - 4)$ $x = \frac{31}{6}$

2 Determine a solução da equação $-\frac{1}{4}(x - 2) = 2x - \frac{1}{3}$, para:

a) $U = \mathbb{Z}$; Não há solução.

b) $U = \mathbb{Q}$. $\frac{10}{27}$

3 Calcule o valor de m, considerando a equação $(m - 2) \cdot x + 2x + 4 \cdot (m - 5) = 0$, em que x é igual a 2. $m = \frac{10}{3}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LUIZ RUBIO

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Sabendo que $U = \mathbb{Q}$, determine no caderno o valor de x em cada equação.

a) $\frac{2x}{5} - \frac{3}{4} = \frac{3x}{20}$ $x = 3$

b) $\frac{x}{4} + \frac{x+3}{2} = 2$ $x = \frac{2}{3}$

c) $\frac{2x}{5} + \frac{15x-1}{20} = \frac{1}{3}$ $x = \frac{1}{3}$

d) $\frac{4x-1}{2} = \frac{-2x+1}{3}$ $x = \frac{5}{16}$

e) $\frac{x-3}{5} + \frac{x}{3} = -4$ $x = -\frac{51}{8}$

f) $2x - \frac{3 \cdot (x+1)}{2} = -1$ $x = 1$

5 Uma empresa de transporte aéreo está oferecendo um desconto de $\frac{3}{10}$ do valor da passagem. Mário pagou R$ 210,00 pela passagem, já com desconto. Qual é o valor da passagem sem desconto? R$ 300,00

RONALDO BARATA

6 Sabendo que $U = \mathbb{Q}$, resolva as equações.

a) $\frac{x+2}{6} + \frac{x+1}{4} = 6$ 13

b) $\frac{2x-3}{8} = \frac{2-x}{4} + \frac{1}{6}$ $\frac{25}{12}$

c) $\frac{x+1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{x-1}{4}$ 4

d) $\frac{2x-4}{5} - 6\frac{1}{6} = \frac{20-x}{4} - \frac{x+\frac{1}{2}}{3}$ 12

e) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{8} = 26$ 48

f) $\frac{4}{3}(y+1) - 2y = 1\frac{1}{2}(y-2)$ 2

7 Diminuindo 6 anos da idade de Luísa, obtêm-se $\frac{3}{5}$ de sua idade. Qual é a idade de Luísa? 15 anos

8 A soma das idades de um pai e seu filho é, hoje, 72 anos. Há 12 anos, a idade do pai era sete vezes a idade do filho. Qual é a idade de cada um hoje? pai: 54 anos; filho: 18 anos

9 Dei três laranjas a cada menino e fiquei com 20 laranjas. Se tivesse dado cinco laranjas a cada menino, teria ficado com oito laranjas. Quantos eram os meninos? 6 meninos

10 Em um concurso de música, foram distribuídos R$ 6 600,00 em prêmios da seguinte maneira: o segundo colocado recebeu o dobro do terceiro mais R$ 1200,00; o primeiro recebeu o triplo do terceiro mais R$ 1800,00. Quanto recebeu o primeiro colocado? R$ 3600,00

RONALDO BARATA

11 Determine três múltiplos consecutivos de 5 cuja soma seja 120. 35, 40 e 45

12 Em uma indústria, o número de mulheres é igual a $\frac{3}{5}$ do número de homens. Se fossem admitidas mais 20 mulheres, o número de funcionárias ficaria igual ao número de funcionários. Quantos homens e quantas mulheres trabalham na fábrica? 50 homens e 30 mulheres

13 Uma pilha de 40 tábuas tem 1,7 m de altura e é formada de tábuas de 2 cm e 5 cm de espessura. Quantas são as tábuas de 5 cm de espessura? 30 tábuas

DESAFIO

A soma dos três algarismos de um número é 19. O algarismo das dezenas é o quádruplo do algarismo das centenas, e o algarismo das unidades é o consecutivo do algarismo das dezenas. Qual é esse número? 289

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14 Érica pede a Fábio que pense em um número e, em seguida, efetue estas operações: adicione 8; multiplique por 3; subtraia 4; adicione o número pensado; divida por 4; adicione 2; subtraia o número pensado. Ao término dessas operações, e antes que Fábio diga alguma coisa, Érica exclama: o resultado obtido é 7. Explique como Érica chega a tal conclusão.

RONALDO BARATA

$[(x + 8) \cdot 3 - 4 + x] : 4 + 2 - x =$
$= [3x + 24 - 4 + x] : 4 + 2 - x =$
$= [4x + 20] : 4 + 2 - x =$
$= x + 5 + 2 - x = 7$

15 Em um cesto há peras, laranjas e bananas. Ao todo, são 96 frutas. O número de peras é o triplo do de laranjas, e o número de bananas é igual ao de laranjas e peras reunidas. Quantas frutas há de cada tipo?
48 bananas, 12 laranjas e 36 peras

16 Uma sacola contém bolas brancas e vermelhas. O total de bolas é 65, e o número de bolas brancas é igual a $\frac{5}{8}$ do de bolas vermelhas. Qual é a quantidade de bolas brancas? 25 bolas brancas

17 As provas de motociclismo são divididas em três categorias, de acordo com o número de cilindradas das motos. A primeira categoria tem o dobro de cilindradas da segunda, e esta, o dobro de cilindradas da terceira. Determine o número de cilindradas das motos de categoria, sabendo que a soma desses números é 875.

CHEN WS/SHUTTERSTOCK

Corrida no Circuito Internacional de Sepang, Kuala Lumpur, Malásia, em outubro de 2010.

17. primeira categoria: 500 cc; segunda categoria: 250 cc; terceira categoria: 125 cc

18 Um regimento de infantaria iniciou uma marcha. Após algum tempo, havia percorrido $\frac{4}{5}$ do caminho. Falta percorrer $\frac{25}{4}$ km. Qual é a distância do percurso? 31,25 km

19 Em um colégio há moças e rapazes, totalizando 525 alunos. Sabendo que a soma dos quocientes do número de rapazes por 25 e do número de moças por 30 é igual a 20, calcule o número de rapazes e de moças.
375 rapazes e 150 moças

20 Em um depósito, há viaturas de quatro rodas e de seis rodas. Ao todo são 40 viaturas e 190 rodas. Quantas viaturas há de cada tipo no depósito? 25 viaturas de quatro rodas e 15 de seis rodas

21 Um pai diz ao filho: "Hoje sua idade é $\frac{2}{7}$ da minha; há cinco anos, era $\frac{1}{6}$".

RONALDO BARATA

Qual é a idade do pai e a do filho?
pai: 35 anos; filho: 10 anos

DESAFIO

Duas torneiras enchem um tanque em quatro horas. Uma única torneira levaria sete horas para enchê-lo. Em quanto tempo a outra torneira, sozinha, encheria o tanque? 9 horas e 20 minutos

RONALDO BARATA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

22 A idade de João e a de Pedro somam 45 anos. Há cinco anos, a idade de João era quatro vezes a de Pedro. Qual é a idade de João e a de Pedro atualmente?
João: 33 anos; Pedro: 12 anos

23 Uma lancha e uma moto aquática têm, juntas, 420 kg. Sabendo que três lanchas pesam tanto quanto quatro motos aquáticas, determine a massa de cada uma.
moto aquática: 180 kg; lancha: 240 kg

GEORGE TUTUMI

24 Uma turma foi dividida em três grupos. No primeiro grupo ficou $\frac{1}{3}$ dos alunos, no segundo $\frac{1}{4}$ e, no terceiro, 15 alunos. Quantos alunos havia nessa turma? 36 alunos

25 A soma de dois números é 84. O menor é $\frac{1}{6}$ do maior. Determine-os. 12 e 72

26 Qual é o número que, aumentado de 72, torna-se o quádruplo do que era antes? 24

27 Em uma fazenda, há galinhas e carneiros. Ao todo, são 21 cabeças e 50 patas. Quantos animais há de cada espécie?
17 galinhas e 4 carneiros

28 Tenho 35 notas que totalizam R$ 270,00. Há notas de R$ 10,00 e de R$ 5,00. Quantas notas de cada valor eu tenho?
16 de R$ 5,00 e 19 de R$ 10,00

29 A idade de um pai é o triplo da idade do filho. Em 10 anos, a idade do pai será o dobro da idade do filho. Qual é a idade de cada um? pai: 30 anos; filho: 10 anos

DESAFIO

Divide-se o número 38 em duas parcelas. A maior parcela dividida pela menor dá quociente 4 e resto 3. Determine o produto dessas duas partes. 217

30 Quando os gêmeos Leandro e Antenor nasceram, Paula tinha 7 anos. Qual é a idade dos gêmeos, se hoje a soma da idade dos três é 34 anos? 9 anos

PAUL MATTHEW PHOTOGRAPHY/ SHUTTERSTOCK

31 Em seu segundo voo livre, Maurício conseguiu superar em 15 km sua primeira marca. Determine a distância percorrida por Maurício no primeiro voo, sabendo que a soma das distâncias percorridas nos dois voos foi de 145 km. 65 km

32 A soma de um número inteiro com o número que se obtém acrescentando um zero a sua direita é 132. Determine o número. 12

33 Um avô tem 60 anos, e seus quatro netos têm 6, 8, 12 e 13 anos. Quantos anos faltam para a idade do avô ser igual à soma da idade dos quatro netos? 7 anos

34 Perguntou-se a uma pessoa que idade tinha. Ela respondeu: se do triplo de minha idade subtrairmos o quíntuplo da idade que eu tinha há 12 anos, teremos minha idade atual. Qual é a idade da pessoa?
20 anos

35 Antônio fez um acordo com seu treinador: em 30 pênaltis batidos, ele receberia R$ 5,00 por acerto e pagaria R$ 1,00 por erro. Ao final da brincadeira, ele recebeu R$ 120,00. Quantos pênaltis acertou? 25

36 Um tonel contém uma mistura de dois líquidos, A e B. O líquido B ocupa 40 ℓ a mais do que a metade do tonel, e o líquido A, 80 ℓ a mais que a terça parte do tonel. Qual é a capacidade do tonel? 720 litros

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

37 Na final de um torneio de tênis, Caio deu 46 saques. Determine quantos saques ele acertou, sabendo que a diferença entre o número de saques certos e errados foi 18. 32 saques

38 Lucas foi passar as férias na praia Canoa Quebrada, no Ceará. Lá verificou que, se gastasse R$ 80,00 por dia, poderia permanecer de férias um dia a mais do que se gastasse R$ 90,00. Quanto Lucas possuía?
R$ 720,00

RACHEL CANTO/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

Praia de Canoa Quebrada (CE), em outubro de 2005.

39 **(Enem)** A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.

Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm $\times$ 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm $\times$ 100 cm). O valor da segunda encomenda será: alternativa **b**

a) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

b) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.

c) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

d) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.

e) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

40 Qual é o número que, dividido por 8, fica diminuído de 1 624 unidades? 1 856

41 Uma pessoa compra 12 frangos e 20 perus por R$ 620,00. Determine o preço de cada ave, sabendo que um frango e um peru custam juntos R$ 35,00. frango: R$ 10,00; peru: R$ 25,00

42 Pense em um número natural de 1 a 9. Multiplique-o por 3 e acrescente 1. Multiplique o novo resultado por 3 e adicione com o número em que você pensou. O resultado terminará com o algarismo 3. Explique por quê.
Justificativa: $(x \cdot 3 + 1) \cdot 3 + x = 9 \cdot x + 3 + x = 10 \cdot x + 3$

43 Uma arquiteta projetou uma casa com 250 m^2 de área construída, com quatro dormitórios do mesmo tamanho e sala com área igual à metade de um desses dormitórios. Determine a área de cada dormitório, sabendo que as demais dependências da casa ocupam a área de 160 m^2. 20 m^2

RONALDO BARATA

DESAFIO

Imagine que você liga a TV e ouve o repórter dizer que uma onda de frio invadiu a cidade de Nova York, nos Estados Unidos, onde a temperatura mínima do dia foi -5 °C (menos cinco graus Celsius). Sabendo que a escala dos termômetros estadunidenses é a Fahrenheit, responda: qual é a temperatura correspondente à informada na notícia nos termômetros de Nova York? 23 °F

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

5 INEQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

HUGO CORDEIRO/AP PHOTO/GLOW IMAGES

Mineirinho e Mineirão, em Belo Horizonte (MG), outubro de 2013.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O ginásio Jornalista Felipe Drummond e o estádio Governador Magalhães Pinto são conhecidos, respectivamente, por Mineirinho e Mineirão. Eles compõem a paisagem da Lagoa da Pampulha como uma das atrações mais belas e tradicionais da capital mineira.

A capacidade do Mineirão é de mais de 60 mil pessoas, e a do Mineirinho, de menos de 20 mil pessoas.

- Compare a capacidade do estádio com a do ginásio usando os sinais $>$ ou $<$. $60.000 > 20.000$
- Represente a sentença abaixo usando apenas a linguagem matemática:
  "A capacidade x do Mineirão é menor que o quádruplo da capacidade y do Mineirinho".
  $x < 4y$

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

O tanque de combustível do carro de André tem capacidade de 60 ℓ. Com 1 ℓ de combustível, esse automóvel pode percorrer, no mínimo, 5 km e, no máximo, 12 km.

GEORGE TUTUMI

- No momento ilustrado acima, o carro de André tinha apenas 5 ℓ de combustível no tanque. Essa quantidade foi suficiente para que ele chegasse até o próximo posto de combustível. Sabendo disso, responda: quantos quilômetros, no mínimo, esse carro percorreu com cada litro de combustível? 7 km
- André está fazendo uma viagem de Brasília (DF) a Palmas (TO). A viagem é de 832 km. Se ele iniciar a viagem com o tanque do carro cheio, quantas vezes, no mínimo, terá de parar para abastecer? 1 vez
- Considerando que o tanque está cheio e que x é a distância percorrida pelo automóvel, qual é o valor mínimo e o valor máximo de x, em quilômetro?
  valor mínimo: 300 km; valor máximo: 720 km

Você vai ver que situações como essa envolvem **inequações do 1º grau com uma incógnita**, assunto deste capítulo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Desigualdades

A ideia de desigualdade é muito usada para comparar dados, principalmente em competições esportivas, nas quais os atletas se esforçam para alcançar o **menor** tempo, a **maior** pontuação, a melhor colocação, a superação de seus limites e um recorde.

Arthur Zanetti faz história e conquista o ouro nas argolas em Londres

Da frieza ao ouro. Arthur Zanetti queria ter a responsabilidade toda em suas mãos, enfaixadas e vermelhas de tanto esforço. Economizou nas eliminatórias para ser o oitavo a se apresentar ali, na final. Foi ao ginásio de aquecimento enquanto o maior dos adversários buscava o bi olímpico. Tudo calculado. Último a se pendurar nas argolas da Arena de North Greenwich, o baixinho de 1,56 m desceu dela, deu um passo para trás e abriu o sorriso. Nota 15.900. Tinha desbancado o chinês Yibing Chen, favoritíssimo. A primeira medalha da história da ginástica brasileira em Olimpíadas era dele, um estreante. E de ouro.

Disponível em: <http://globoesporte.globo.com/olimpiadas/noticia/2012/08/arthur-zanetti-faz-historia-e-conquista-o-ouro-nas-argolas-em-londres.html>. Acesso em: 6 mar. 2015.

O chinês de 1,60 m conquistou a prata com nota 15.800, e o italiano Matteo Morandi, de 1,70 m, obteve nota 15.733, o que lhe garantiu a medalha de bronze.

Chamamos de **desigualdade** uma sentença matemática em que aparece um destes sinais:

$>$	$\geqslant$	$<$	$\leqslant$	$\neq$
maior que	maior ou igual a	menor que	menor ou igual a	diferente

Com os dados apresentados no texto acima, podemos fazer algumas comparações:

- Yibing Chen ficou em 2º lugar porque obteve nota **menor que** a de Arthur Zanetti e **maior que** a de Matteo Morandi.

$$15.800 < 15.900 \text{ e } 15.800 > 15.733$$

- Entre os três atletas que subiram ao pódio, Arthur Zanetti era o de altura **menor**, pois:

$$1{,}56\text{ m} < 1{,}60\text{ m} \text{ e } 1{,}56\text{ m} < 1{,}70\text{ m}$$

BEN STANSALL/AFP

BEN STANSALL/AFP

MIKE BLAKE/REUTERS/LATINSTOCK

GREGORY BULL/AP PHOTO/GLOW IMAGES

RONALD MARTINEZ/GETTY IMAGES

BEN STANSALL/AFP

Registros da apresentação de Arthur Zanetti e da comemoração pela conquista da medalha de ouro nos Jogos Olímpicos de Londres 2012.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esses sinais de desigualdade estabelecem dois membros: o 1º membro fica à esquerda do sinal de desigualdade e o 2º membro, à direita.

$$\underbrace{15.900}_{\text{1º membro}} > \underbrace{15.733}_{\text{2º membro}}$$

Propriedades

Antes de conhecer as propriedades das desigualdades você deve considerar que:

- os sinais $<$ e $<$ têm o mesmo sentido;
- os sinais $>$ e $>$ têm o mesmo sentido;
- os sinais $<$ e $>$ têm sentidos opostos;
- os sinais $>$ e $<$ têm sentidos opostos;
- os sinais $\leqslant$ e $\leqslant$ têm o mesmo sentido;
- os sinais $\geqslant$ e $\geqslant$ têm o mesmo sentido;
- os sinais $\leqslant$ e $\geqslant$ têm sentidos opostos;
- os sinais $\geqslant$ e $\leqslant$ têm sentidos opostos.

Observe as situações de desigualdade a seguir:

Explique aos alunos que as propriedades das desigualdades aqui exemplificadas podem ser demonstradas matematicamente. Ou seja, podem ser provadas para todos os números que eles conhecem, os racionais.

Situação 1

- $8 > 3$

  $8 + 4 > 3 + 4$ ← Adicionamos 4 unidades aos dois membros da desigualdade.

  $12 > 7$ ← O sinal tem o mesmo sentido da desigualdade inicial.

- $2 < 6$

  $2 - 5 < 6 - 5$ ← Subtraímos 5 unidades dos dois membros da desigualdade.

  $-3 < 1$ ← O sinal tem o mesmo sentido da desigualdade inicial.

A propriedade relacionada a estes dois exemplos pode ser explicada da seguinte maneira: adicionando ou subtraindo um mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, obtemos outra desigualdade de mesmo sentido.

Situação 2

- $9 > 5$

  $9 \cdot (+5) > 5 \cdot (+5)$ ← Multiplicamos os dois membros da desigualdade por um número positivo.

  $+45 > +25$ ← O sinal tem o mesmo sentido da desigualdade inicial.

- $4 < 8$

  $4 : (+2) < 8 : (+2)$ ← Dividimos os dois membros da desigualdade por um número positivo.

  $+2 < +4$ ← O sinal tem o mesmo sentido da desigualdade inicial.

Os exemplos são explicados pela propriedade: multiplicando ou dividindo um mesmo número positivo pelos dois membros de uma desigualdade, obtemos outra desigualdade de mesmo sentido.

Situação 3

- $5 > -4$

  $5 \cdot (-3) < -4 \cdot (-3)$ ← Multiplicamos os dois membros da desigualdade por um número negativo.

  $-15 < +12$ ← O sinal tem o sentido oposto da desigualdade inicial.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- $-8 < 12$

$-8 : (-4) > 12 : (-4)$ ← Dividimos os dois membros da desigualdade por um número negativo.

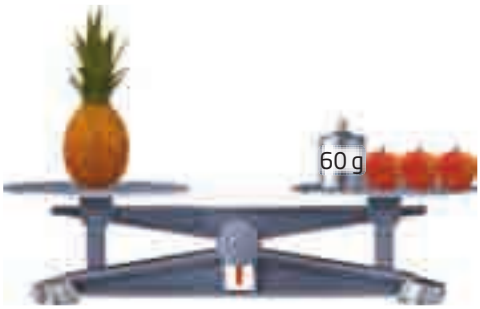
$2 > -3$ ← O sinal tem o sentido oposto ao da desigualdade inicial.

Os exemplos são explicados pela propriedade: multiplicando ou dividindo um mesmo número negativo pelos dois membros de uma desigualdade, obtemos outra desigualdade de sentido oposto.

Inequações

Na balança de dois pratos a seguir, podemos ver um abacaxi em um prato e um peso de 60 g e três maçãs de mesma massa no outro.

Observe que os pratos dessa balança estão em equilíbrio: há **igualdade** das massas contidas nos dois pratos.

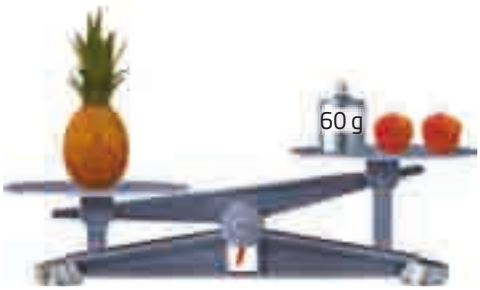


LUIZ RUBIO

Sabemos que o abacaxi tem 300 g, mas a massa das maçãs é desconhecida. Considerando que cada maçã tem x gramas, podemos representar essa igualdade na linguagem matemática pela seguinte equação:

$$300 = 60 + 3x$$

Agora, observe o que ocorre quando retiramos da balança uma das maçãs.



LUIZ RUBIO

Nesse caso, podemos verificar uma **desigualdade** das massas contidas nos dois pratos da balança. Essa desigualdade também pode ser representada na linguagem matemática. Veja:

$$300 > 60 + 2x$$

Toda desigualdade que tem pelo menos uma incógnita, e cada incógnita tem expoente maior ou igual a 1 é chamada de **inequação**.

Exemplos

- $x + 5 > -3x$
- $x^2 - 4 \leqslant 20$
- $x + y < 8$
- $y^2 - 2y \geqslant -16$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Uma inequação com uma incógnita é considerada do 1º grau quando o expoente da incógnita é igual a 1. Esse tipo de inequação pode ser escrito de uma das formas:

$ax + b > 0$
$ax + b < 0$
$ax + b \geqslant 0$
$ax + b \leqslant 0$
$ax + b \neq 0$

sendo a um número racional diferente de zero, b um número racional qualquer e x a incógnita.

Assim, são inequações do 1º grau com uma incógnita:

- $3x > 6$ (a incógnita é x)
- $4y < 7$ (a incógnita é y)
- $2z \geqslant -5$ (a incógnita é z)
- $3w \leqslant 9$ (a incógnita é w)

UM POUCO DE HISTÓRIA

DIOGO SAITO

Os sinais

Os sinais "+" e "−", usados para representar, respectivamente, a adição e a subtração, foram introduzidos pelo professor alemão Johann Widman (1462-1498) por volta de 1489, e eram utilizados para indicar excesso ou falta de mercadorias.

O sinal "=" foi utilizado pela primeira vez pelo inglês Robert Recorde (1512-1558), em 1557. Matemático e médico, Recorde usou um par de retas paralelas, ou retas gêmeas, para criar esse símbolo.

Os sinais ">" e "<", indicativos de desigualdade, foram registrados pelo matemático inglês Thomas Harriot (1560-1621), em obra publicada postumamente em 1631. O sinal "×", que representa a multiplicação, acredita-se que tenha sido utilizado pela primeira vez pelo inglês William Oughtred (1574-1660), no início do século XVII. A notação "$\sqrt{\ }$", indicativa de raiz quadrada (que deriva da letra "r"), por sua vez, foi introduzida em 1525 pelo alemão Christoph Rudolff (1499-1545).

A adoção desses sinais na Matemática não foi imediata; passaram-se séculos até que todos fossem usados como são hoje.

Fontes: Carl Boyer. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2001; Howard Eves. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Unicamp, 1995.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Copie as inequações abaixo e identifique o 1º e o 2º membros de cada uma delas.

a) $2x - 3 \leqslant 8$ primeiro membro: $2x - 3$; segundo membro: 8

b) $-3x < 2x + 4$ primeiro membro: $-3x$; segundo membro: $2x + 4$

c) $\frac{x}{2} - 5 \geqslant \frac{2}{5}$ primeiro membro: $\frac{x}{2} - 5$; segundo membro: $\frac{2}{5}$

2 Identifique, no caderno, os itens que apresentam uma inequação. alternativas **b**, **d**, **e** e **f**

a) $3^2 + 1^2 = 10$

b) $\frac{x}{3} + 1 < 0$

c) $4x = -12$

d) $6x > 0$

e) $2x - y > 5$

f) $2x + 7 \leqslant 6x$

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Escreva no caderno uma inequação que represente cada uma das situações abaixo.

a) O dobro de um número mais cinco é menor que oito. $2x + 5 < 8$

b) A diferença entre um número e sua quinta parte é menor ou igual a quatro. $x - \frac{x}{5} \leqslant 4$

c) O quíntuplo de um número menos sua terça parte é menor que dois. $5x - \frac{x}{3} < 2$

d) A diferença entre o triplo de um número e sua quarta parte é maior ou igual a sete. $3x - \frac{x}{4} \geqslant 7$

4 A distância entre duas estações de metrô é x km. Após percorrer 5 km, um trem está a menos da metade da distância entre as duas estações. Escreva uma inequação que represente essa situação. $x - 5 < \frac{x}{2}$

MAURICIO SIMONETTI/PULSAR IMAGENS

Plataforma do metrô, estação Consolação em São Paulo, abril de 2012.

5 Quais dos itens a seguir apresentam uma inequação do 1º grau com uma incógnita.

alternativas **b**, **d**, **f** e **h**

a) $x + y > 4$

b) $x + 50 > 60$

c) $x^2 + y > z$

d) $60 > y$

e) $x^3 > x$

f) $6w > 10 + w$

g) $7a > a + b$

h) $c > 5c - 10$

6 Observe a figura abaixo e responda às questões.

LUIZ RUBIO

a) A desigualdade que melhor representa essa situação é $x > 5$ ou $5 > x$? $x > 5$

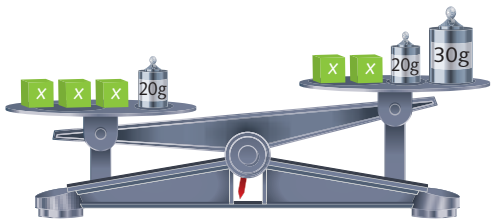
b) Se acrescentarmos 100 g a cada prato da balança, como poderemos representar a nova desigualdade? $x + 100 > 105$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Inequações equivalentes

Situação 1

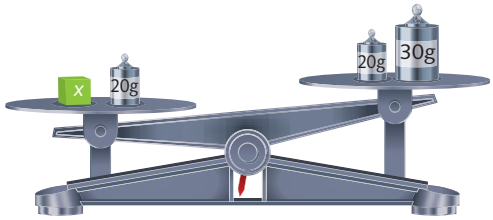
A balança abaixo está em desequilíbrio, pois a massa contida no prato da esquerda é maior que a do prato da direita.



LUIZ RUBIO

Podemos representar a situação pela inequação $3x + 20 > 2x + 20 + 30$.

Retirando 2 de cada prato da balança, ela continua em desequilíbrio e o prato da esquerda continua com maior massa que o prato da direita. Veja:



LUIZ RUBIO

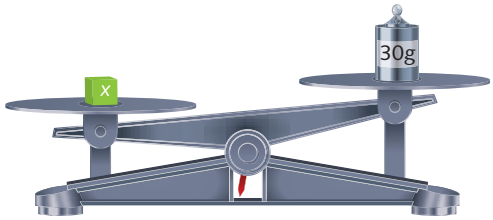
Podemos representar a situação da seguinte forma:

$3x + 20 - 2x > 2x + 20 + 30 - 2x$

ou seja,

$x + 20 > 20 + 30$

Retirando 20 g de cada prato, a balança ainda fica em desequilíbrio, e o prato da esquerda continua com maior massa que o prato da direita.



LUIZ RUBIO

Agora, podemos representar a situação da seguinte forma:

$x + 20 - 20 > 20 + 30 - 20$

ou seja,

$x > 30$

As inequações $3x + 20 > 2x + 20 + 30$, $x + 20 > 20 + 30$ e $x > 30$ são equivalentes, ou seja, têm a mesma solução.

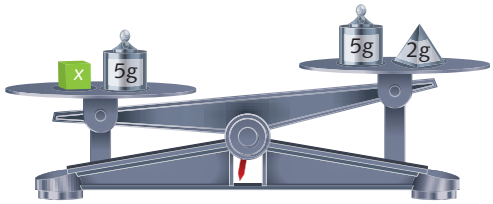
Em um mesmo conjunto universo, inequações que apresentam a mesma solução são chamadas de **inequações equivalentes**.

Situação 2

A balança abaixo está em desequilíbrio, e o prato da esquerda tem maior massa.

Nessa situação, cada tem x grama de massa, cada , 5 g, e cada , 2 g.

No prato da esquerda há 1 e um 1 . No prato da direita há 1 e 1 . Veja:



LUIZ RUBIO

Podemos representar a situação por:

$x + 5 > 5 + 2$

Retirando 1 de cada prato, a balança permanece desequilibrada e o prato da esquerda continua com maior massa. Veja:

LUIZ RUBIO

Podemos representar a situação por:

$x + 5 - 5 > 5 + 2 - 5$

$x > 2$

Portanto, a massa de 1 é maior que a massa de 1 .

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Quando adicionamos a mesma quantidade aos dois membros de uma inequação ou subtraímos a mesma quantidade dos dois membros de uma inequação, obtemos uma inequação equivalente à inequação dada. Esse é o **princípio aditivo da desigualdade**.

Exemplos

- $2x - 5 > 7$

  $2x - 5 + 5 > 7 + 5$ ← Adicionamos 5 unidades a cada membro.

  $2x > 12$

As inequações $2x - 5 > 7$ e $2x > 12$ são equivalentes.

- $3x + 4 < 20$

  $3x + 4 - 4 < 20 - 4$ ← Subtraímos 4 unidades de cada membro.

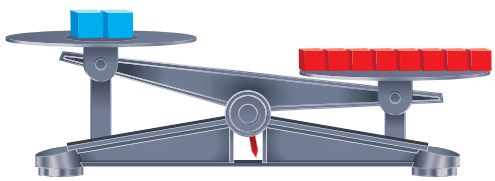
  $3x < 16$

As inequações $3x + 4 < 20$ e $3x < 16$ são equivalentes.

Situação 3

A balança abaixo está em desequilíbrio, e o prato da esquerda tem menor massa.

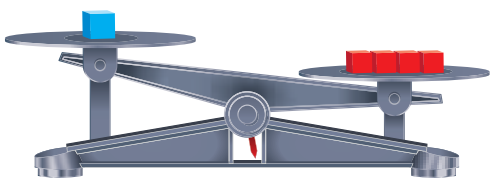
No prato da esquerda foram colocados 2 🟦 de x grama cada. No prato da direita foram colocados 8 🟥 de 2 g cada. Veja:



Podemos representar a situação por:

$$2x < 16$$

Retirando a metade do conteúdo de cada prato, a balança permanece desequilibrada e o prato da esquerda continua com menor massa. Veja:



Podemos representar a situação por:

$$\frac{2x}{2} < \frac{16}{2}$$

$$x < 8$$

Portanto, 1 🟦 tem massa menor que 8 g.

Multiplicando ou dividindo os membros de uma inequação por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma inequação equivalente à inequação dada. Esse é o **princípio multiplicativo das desigualdades**.

Exemplo

$-9 < 7x$

$-9 \cdot 4 < 7x \cdot 4$ ← Multiplicamos cada termo por 4.

$-36 < 28x$

As inequações $-9 < 7x$ e $-36 < 28x$ são equivalentes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LUIZ RUBIO

Observação

Você já sabe que, ao multiplicar ou dividir os membros de uma desigualdade por um mesmo valor, é necessário estar atento ao sentido da desigualdade.

- $2 > -7$
  $2 \cdot 3 > -7 \cdot 3$ ← Multiplicamos os dois membros da desigualdade por um número positivo.
  $6 > -21$ ← O sinal tem o mesmo sentido da desigualdade inicial.

- $5 < 18$
  $5 \cdot (-2) > 12 \cdot (-2)$ ← Multiplicamos os dois membros da desigualdade por um número negativo.
  $-10 > -24$ ← O sinal tem o sentido oposto ao da desigualdade inicial.

Por isso, ao multiplicar ou dividir os membros de uma inequação por um número negativo, é necessário inverter o sinal da desigualdade.
Veja os exemplos:

- $\frac{x}{5} - 2 > 4$
  $5 \cdot \left(\frac{x}{5} - 2\right) > 5 \cdot 4$ ← Multiplicamos os membros por 5.
  $x - 10 > 20$ ← Mantemos o sinal da desigualdade, pois multiplicamos os dois membros da inequação por um número positivo.

  As inequações $\frac{x}{5} - 2 > 4$ e $x - 10 > 20$ são equivalentes.

- $-3x < 8$
  $\frac{-3x}{-3} > \frac{8}{-3}$ ← Dividimos os dois membros da inequação por -3, que é um número negativo; por isso invertemos o sinal da desigualdade.
  $x > -\frac{8}{3}$

  As inequações $-3x < 8$ e $x > -\frac{8}{3}$ são equivalentes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Dada a inequação $x < 15$, é correto escrever: $x - 10 < 15 - 10$? Justifique sua resposta. Sim, pois ao diminuir 10 unidades de cada membro da inequação obtemos uma sentença equivalente à primeira.

2 Considere a inequação $-7 < 5x$. Obtenha inequações equivalentes a essa, fazendo o que se pede em cada item.

a) Multiplique os dois membros por 4. $-28 < 20x$

b) Divida os dois membros por -1. $7 > -5x$

c) Adicione -3 aos dois membros. $-10 < 5x - 3$

d) Subtraia -2 dos dois membros. $-5 < 5x + 2$

3 Sendo $a < b$, indique, no caderno, as sentenças verdadeiras. alternativas **a**, **b**, **d** e **f**

a) $a + 7 < b + 7$

b) $\frac{a}{5} < \frac{b}{5}$

c) $3a > 3b$

d) $a - 10 < b - 10$

e) $-2a < -2b$

f) $-a > -b$

4 Se multiplicarmos os dois membros da desigualdade $-10x < -12$ por (-1), que desigualdade obteremos? $10x > 12$

3 Resolução de uma inequação do 1º grau

Resolver uma inequação do 1º grau com uma incógnita significa determinar as **soluções da inequação** no conjunto universo considerado.

Para tanto, vale a forma de resolução usada para as equações, aplicando, nesse caso, os princípios aditivo e multiplicativo da desigualdade.

Observe os exemplos.

Sendo $U = \mathbb{Q}$, vamos resolver as inequações a seguir.

- $3x - 5 < 8$

$3x - \cancel{5} + \cancel{5} < 8 + 5$ ← Utilizamos o princípio aditivo, adicionando 5 aos dois membros da desigualdade.

$3x < 8 + 5$

$3x < 13$

$3x \cdot \frac{1}{3} < 13 \cdot \frac{1}{3}$ ← Utilizamos o princípio multiplicativo, multiplicando por $\frac{1}{3}$ os dois membros da desigualdade.

$x < \frac{13}{3}$

A solução da inequação é o conjunto de todos os números racionais menores que $\frac{13}{3}$.

- $10 - 6x > -2$

$10 - 6x - 10 > -2 - 10$ ← Utilizamos o princípio aditivo, subtraindo 10 dos dois membros da desigualdade.

$-6x > -12$

$-6x \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) < -12 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$ ← Utilizamos o princípio multiplicativo, multiplicando por $\left(-\frac{1}{6}\right)$ os dois membros da desigualdade.

$x < 2$

A solução da inequação é o conjunto de todos os números racionais menores que 2.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Sendo $U = \mathbb{Q}$, resolva as inequações.

a) $(x + 2) + (x + 3) + (x + 4) \leqslant 1$ $x \leqslant -\frac{8}{3}$

b) $4 - 2x > 3 - 3x$ $x > -1$

c) $x - 5 \leqslant 1 - x$ $x \leqslant 3$

d) $x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2} + 3x$ $x > -\frac{3}{2}$

2 Sendo $U = \mathbb{N}$, determine a solução da inequação $3\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{2x}{3} < 8$.

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$

3 Determine o maior valor inteiro para x que satisfaça a inequação $\frac{x - 10}{5} < 0$. 9

4 Qual é o número inteiro cujo triplo mais 5 é menor do que 2 e cuja terça parte mais 4 é maior do que 3? -2

5 Um retângulo tem $2y$ cm de comprimento e y cm de largura. Qual deve ser o menor valor inteiro de y, se o perímetro do retângulo é maior que o perímetro de um triângulo equilátero com 16 cm de lado?

9 cm

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Classifique cada uma das sentenças abaixo como uma igualdade ou uma desigualdade.

- $x + 3 = 2$ — igualdade
- $7 + 8 < 18$ — desigualdade
- $x - 2 \neq -4$ — desigualdade
- $2x + \frac{1}{5} = -6$ — igualdade
- $x - 7 \geqslant 10$ — desigualdade
- $5 + 3 \neq 9$ — desigualdade
- $-1 + 2 = 1$ — igualdade
- $-x + \frac{3}{4} > 0$ — desigualdade

2 Na resolução de inequações, assim como na resolução de equações, aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo. Explique-os.

Quando uma mesma quantidade é adicionada (ou subtraída) aos dois membros de uma inequação (ou de uma equação), obtemos uma inequação (ou uma equação) equivalente. Multiplicando ou dividindo os membros de uma inequação (ou de uma equação) por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma inequação (ou uma equação) equivalente à inequação (ou à equação) dada.

Aplicando

1 Sendo $U = \{-1, 0, 1\}$, resolva a inequação: $15 - 4(1 - 3x) \leqslant x$ -1

2 Determine o maior valor inteiro que satisfaça a inequação:
$2x + 5 - 3 \cdot (x + 2) < 14 - 2 \cdot (x - 1)$ 16

3 Determine o menor valor inteiro que satisfaça a inequação:
$\frac{4x - 1}{9} \leqslant \frac{2x - 5}{6}$ -7

4 Sendo $U = \mathbb{N}$, determine a solução da inequação: $\frac{x - 1}{2} > \frac{2x}{4} + \frac{1}{3}$ Não tem solução em U.

5 Sendo $U = \mathbb{Q}$, resolva a inequação.
$\frac{3x}{5} - x \geqslant 2$ $x \leqslant -5$

6 Se $x < 10$, podemos escrever:
$x - 5 < 10 - 5$? Justifique sua resposta.
Sim; subtraindo 5 unidades de cada membro, de acordo com o princípio aditivo.

DESAFIO

A medida da largura de um retângulo é 5 cm menor que a medida de seu comprimento. Determine as possíveis medidas inteiras do comprimento desse retângulo, em centímetro, sabendo que o perímetro é menor que 26 cm. 6 cm, 7 cm e 8 cm

7 Um biólogo encontrou um ninho de tartaruga-de-couro, o maior dos répteis marinhos. A quantidade t de ovos encontrados satisfaz simultaneamente as duas inequações abaixo.

- $\frac{2t + 4}{10} > 17$
- $\frac{15t}{14} - 3 < t + \frac{43}{14}$

BRIAN J. SKERRY/ NATIONAL GEOGRAPHIC SOCIETY/CORBIS/LATINSTOCK

Tartaruga-de-couro, Indonésia, outubro de 2007. Esse animal, que pode atingir 800 kg de massa e 1,8 m de comprimento, encontra-se criticamente ameaçada de extinção.

Determine quantos ovos de tartaruga havia no ninho resolvendo as inequações dadas.
84 ovos de tartaruga

8 Se $2x \geqslant 15$, podemos afirmar que $-2x \leqslant -15$? Justifique sua resposta.
Sim; multiplicando por -1 os dois membros, de acordo com o princípio multiplicativo.

9 Sendo $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, determine a solução da inequação: $3(x - 2) < -2x + 5$.
$-2, -1, 0, 1, 2$

10 Qual é o maior número inteiro que satisfaz a inequação $\frac{x}{2} + \frac{4x}{5} < 1$? zero

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11 Sendo $U = \{-6, -5, -3, 0, 5, 6\}$, determine a solução de cada uma das inequações abaixo.

a) $-2x \leqslant 10$ $-5, -3, 0, 5, 6$

b) $\frac{x}{2} + x > 5$ $5, 6$

12 Sendo $U = \mathbb{Q}$, resolva as inequações.

a) $2(x + 1) - 10 \geqslant 5(5x - 1)$ $x \leqslant -\frac{3}{23}$

b) $\frac{x}{3} + 2 > x - 3$ $x < \frac{15}{2}$

13 Em um curso de línguas cobram-se taxa de inscrição de R$ 216,00 e mensalidade de R$ 192,00. Com R$ 1200,00, qual é o número máximo de meses completos desse curso que um aluno poderá frequentar?

cinco meses

RONALDO BARATA

14 **(Enem)** Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65, enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo.

Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

a) 476
b) 675
c) 923
d) 965
e) 1538

alternativa **c**

15 Verifique quais das seguintes sentenças são inequações. alternativas **b**, **c** e **d**

a) $x - 4 = 11$
b) $5x \leqslant 8x + 10$
c) $\frac{x}{2} - 3 < \frac{1}{2}x$
d) $x + 8 > 0$
e) $3x + 17 = 9$
f) $2x + 1 = 3x - 1$

16 Escreva a inequação correspondente a cada uma das situações abaixo.

a) O triplo de um número mais 5 é menor que 10. $3x + 5 < 10$

b) A diferença entre os $\frac{3}{4}$ de um número e os seus $\frac{2}{3}$ é menor que o próprio número. $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x < x$

c) A soma de um número com sua décima parte é maior que 5. $x + \frac{x}{10} > 5$

d) A diferença entre o quíntuplo de um número e 10 é maior que zero. $5x - 10 > 0$

17 Sendo $U = \left\{4, 9, -3, \frac{1}{2}, 1\right\}$, determine a solução da inequação:

$3x - 6 < x + 14$ U

18 Identifique a inequação que não admite -2 como solução. alternativa **d**

a) $3x - 1 < 5$
b) $3x - 1 > x - 6$
c) $-3 - 4x > 2$
d) $2x + 3 > 0$

19 O número 16 é solução da inequação $2x - 3(x + 2) < 9 - 2(x - 1)$? Justifique sua resposta. sim, pois: $x < 17$

DESAFIO

Pensei em um número inteiro, acrescentei quatro unidades, tripliquei a soma, dividi o valor obtido por 5 e encontrei um número maior que 18 e menor que 19. Em que número pensei? 27

RONALDO BARATA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

6 ÂNGULOS

BEN WOOD/CORBIS/LATINSTOCK

Neste capítulo, vamos trabalhar o conceito de ângulo, suas medidas e aplicações, e resolver problemas envolvendo ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice. Com base na foto de abertura do capítulo, mostre uma aplicação prática do uso de ângulo e indique seus elementos.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

À beira do rio Tâmisa, em Londres, foi construída a London Eye, também conhecida como Millennium Wheel (Roda do Milênio). Trata-se de uma roda-gigante composta de 32 cabines e que faz a volta completa em 30 minutos. Essa atração turística recebe uma média de 15 000 visitantes por dia.

Responda:

- O ângulo $\hat{a}$ cabe quantas vezes no ângulo $\hat{b}$? 8
- Usando o transferidor, você seria capaz de determinar a medida do ângulo $\hat{b}$ indicado na figura? O ângulo $\hat{b}$ é reto, agudo ou obtuso?
90 graus ou 90°; ângulo reto

A London Eye é uma roda-gigante de observação. As cabines envidraçadas permitem visão panorâmica da metrópole.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe se os alunos se lembram o que são ângulos retos, agudos ou obtusos.

Observe a ilustração abaixo, identifique os ângulos destacados e procure classificá-los em reto, agudo ou obtuso.

ângulo reto (destacado na roda); ângulo agudo (destacado na rampa); ângulo obtuso (destacado no quadro da bicicleta)

Tente descobrir outros ângulos que a figura sugere.

Resposta pessoal

HUGO ARAÚJO

Neste capítulo, vamos ampliar o estudo sobre ângulos, já iniciado nos anos anteriores.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 O ângulo e seus elementos

Povos antigos, como os egípcios, babilônios, hindus e chineses, já conheciam as figuras geométricas e tinham uma noção precisa de **ângulo**. Esses conhecimentos eram utilizados principalmente na Astronomia e na Arquitetura para determinar áreas e distâncias.

Aplicações dos conceitos de ângulo estão presentes, hoje, na Engenharia Civil (na construção de estradas, rampas), nos transportes (em rotas de orientação), em máquinas, nos projetos espaciais (como em lançamento de foguetes), nas cartas geográficas (nos meridianos e paralelos da Terra), entre outros usos. Observe a presença diversificada de ângulos em peças de movimentação de uma retroescavadeira e em uma rota de GPS no *smartphone*.

Na foto da retroescavadeira, vemos dois ângulos destacados: $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.

No cruzamento das ruas destacamos os ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$.

Ângulos

Traçando duas semirretas de mesma origem determinamos, em um plano, duas regiões. Cada uma dessas regiões, incluindo as semirretas, é chamada de **ângulo**. Veja:

As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de origem no ponto O e os dois ângulos.

Ângulo é a união de duas semirretas que têm a mesma origem com uma das regiões do plano por elas limitada.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

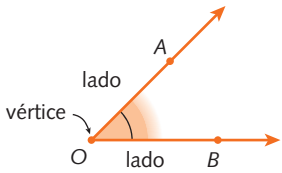
MAGICOVEN/SHUTTERSTOCK

GEORGE TUTUMI

GUILHERME CASAGRANDI

Os lados de um ângulo são as semirretas que o determinam, e o vértice é a origem comum dessas semirretas.

O ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é indicado por: $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$ ou $\hat{O}$.



$A\hat{O}B$ → Lemos: "ângulo AOB".

A letra que corresponde ao vértice deve ficar entre as outras duas.

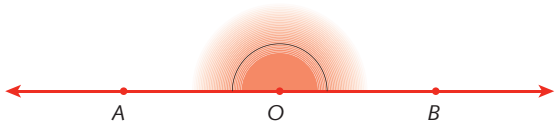
Agora, observe dois casos em que duas semirretas de mesma origem estão contidas em uma mesma reta.

- As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são coincidentes. Temos um **ângulo nulo** e um **ângulo de uma volta**.

ângulo nulo

ângulo de uma volta

- As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ têm sentidos opostos.
  Temos um **ângulo raso** ou de **meia-volta**.

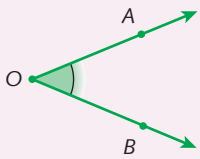


ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

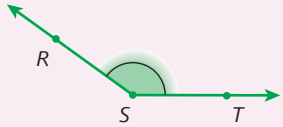
1 Indique como lemos o vértice e os lados de cada ângulo.

a)



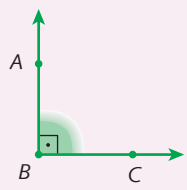
$A\hat{O}B$, O, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$

b)



$R\hat{S}T$, S, $\overrightarrow{SR}$ e $\overrightarrow{ST}$

c)



$A\hat{B}C$, B, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$

d)

$P\hat{Q}R$, Q, $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QR}$

2 Desenhe um ângulo raso e um nulo. A seguir, observe os lados dos ângulos e responda:

a) São semirretas? sim

b) Estão contidos em uma mesma reta? sim

c) São coincidentes? Os lados do ângulo raso não são coincidentes; já os lados do ângulo nulo são.

GUILHERME CASAGRANDI
GUILHERME CASAGRANDI
GUILHERME CASAGRANDI
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Medida de ângulo

Ao medirmos um ângulo, consideramos a abertura entre as semirretas. Podemos utilizar como unidade de medida de ângulos, o **grau**.

Tomando um ângulo de uma volta e dividindo-o em 360 partes iguais, determinamos 360 ângulos com a mesma medida. Cada um deles representa um ângulo de **1 grau** (**1°**).

ângulo de uma volta

ângulo de 1°

LUIZ RUBIO

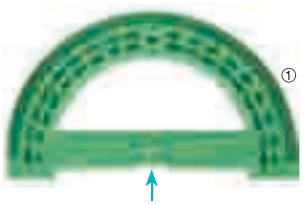
Para medir ângulos, podemos utilizar o **transferidor**, que já vem graduado de 1° em 1°. Observe as fotos ao lado.

Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**.

- O minuto corresponde a $\frac{1}{60}$ do grau.

$1° = 60'$

- O segundo corresponde a $\frac{1}{60}$ do minuto. $1' = 60''$



centro
transferidor de 180°

transferidor de 360°

CRÉDITOS DAS FOTOS – ①: JAVIER JAIME; ②: JACEK/KINO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lendo e aprendendo

Uma manobra de 180° no *windsurf*

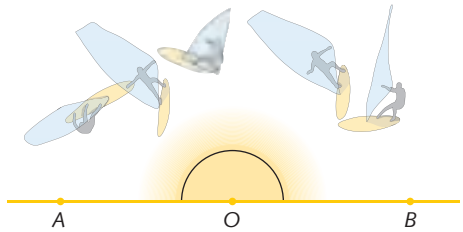
O *windsurf* é um esporte olímpico praticado no mar, seja com ondas grandes, seja com pouca ondulação. As competições possuem várias modalidades, desde as mais radicais, até as mais tradicionais.

Na modalidade *Aerial Jibe*, o velejador salta sem soltar os pés das alças, gira a prancha 180° e vira a vela no ar.

Mostrar que o ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo raso.

CLEISON SILVA

Giro de 180° em manobra de *windsurf*, Jericoacoara (CE), em 2012.



GUILHERME CASAGRANDI

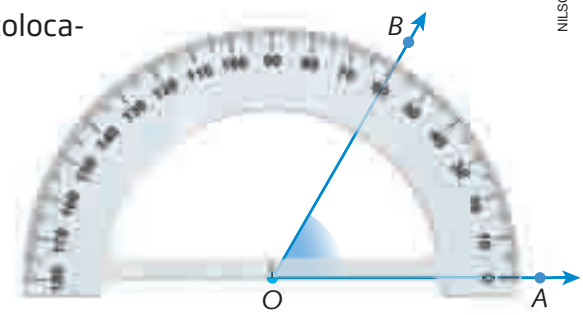
Como medir um ângulo utilizando o transferidor

Para medir um ângulo utilizando o transferidor, usamos este procedimento:

1º) O centro marcado no transferidor deve ser colocado sobre o vértice do ângulo (ponto *O*).

2º) A linha do transferidor que passa pelo centro e pelo zero deve estar sobre um dos lados que formam o ângulo $A\hat{O}B$. Nesse caso, a semirreta $\overrightarrow{OA}$.

3º) Verificamos a medida na escala graduada em que passa a outra semirreta ($\overrightarrow{OB}$).

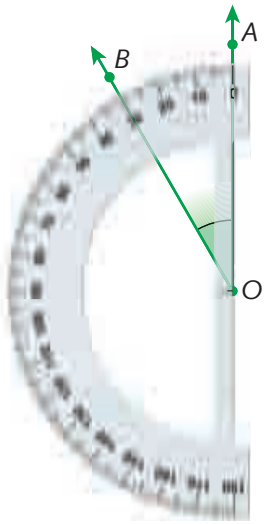


NILSON CARDOSO

A medida de $A\hat{O}B$ é igual a 60°.
Indica-se: med($A\hat{O}B$) = 60°

Observe as indicações de algumas medidas de ângulos:

- 30° ⟶ Lemos: "trinta graus".
- 45° 50′ ⟶ Lemos: "quarenta e cinco graus e cinquenta minutos".
- 30° 48′ 36″ ⟶ Lemos: "trinta graus, quarenta e oito minutos e trinta e seis segundos".



NILSON CARDOSO

A medida de $A\hat{O}B$ é igual a 30°.
Indicamos: med($A\hat{O}B$) = 30°

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lendo e aprendendo

O teodolito e o sextante

Além do transferidor, há outros instrumentos que medem ângulos com precisão, como o teodolito, utilizado na **agrimensura**; e o **sextante**, usado na navegação.

Agrimensura
Medição de terras.

PAVELSH/SHUTTERSTOCK

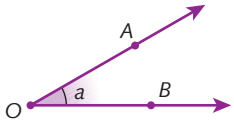
Teodolito.

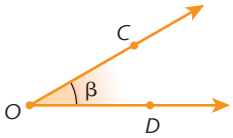
VRIHU/SHUTTERSTOCK

Sextante.

Observações

1 A representação da medida de um ângulo também pode ser feita por meio de uma **letra latina minúscula** ou de **letras gregas minúsculas**.





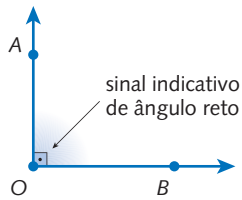
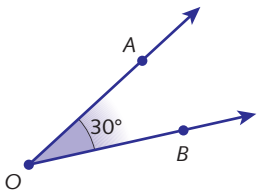
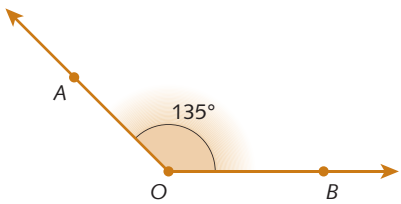
LUIZ RUBIO

2 O **ângulo raso** ou de **meia-volta** mede **180°**.

3 O **ângulo nulo** mede **0°**.

Ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso

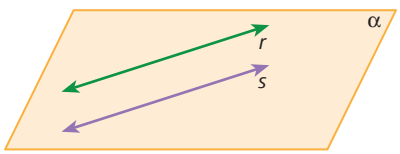
Um ângulo pode ser classificado quanto à sua medida em: reto, agudo ou obtuso. Observe:

Ângulo reto	Ângulo agudo	Ângulo obtuso
Ângulo reto é aquele que tem medida 90°.	Ângulo agudo é o ângulo que tem medida menor que 90°.	Ângulo obtuso é o ângulo que tem medida maior que 90° e menor que 180°.
		
$A\hat{O}B$ é ângulo reto.	$A\hat{O}B$ é ângulo agudo.	$A\hat{O}B$ é ângulo obtuso.

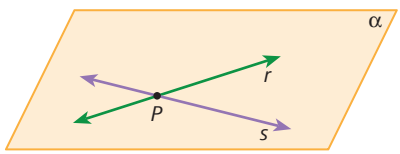
LUIZ RUBIO

Retas perpendiculares e retas oblíquas

Observe a posição das duas retas traçadas no plano, já estudadas no ano anterior.



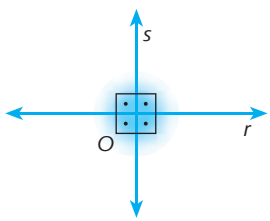
Retas paralelas (indicamos $r \parallel s$)



Retas concorrentes (indicamos $r \times s$)

LUIZ RUBIO

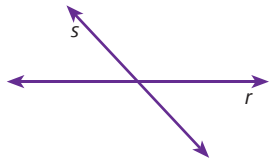
As retas r e s da figura abaixo são concorrentes e formam entre si quatro ângulos congruentes, todos retos (90°), elas são **retas perpendiculares**.



Retas perpendiculares

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

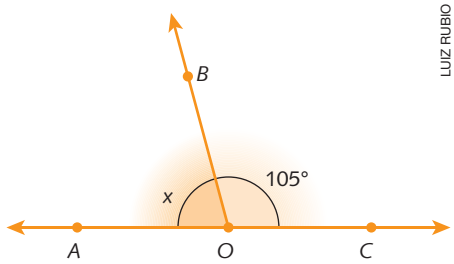
As retas r e s da figura abaixo são concorrentes e não são perpendiculares, podemos chamá-las de **retas oblíquas**.



Retas oblíquas

Questões envolvendo medidas de ângulos

- Vamos determinar a medida do ângulo $A\hat{O}B$ na figura ao lado.



LUIZ RUBIO

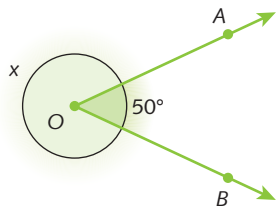
$\text{med}(A\hat{O}B) = x$ e $\text{med}(B\hat{O}C) = 105°$

Como $\text{med}(A\hat{O}C)$ é 180°, pois $A\hat{O}C$ é um ângulo raso, temos:

$$\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) = \text{med}(A\hat{O}C)$$
$$x + 105° = 180°$$
$$x = 180° - 105° = 75°$$

Logo, a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é 75°.

- Vamos determinar a medida x, em grau, na figura ao lado.



Verificamos que o ângulo de medida x e o ângulo de 50° formam, juntos, um ângulo de uma volta, que mede 360°. Assim:

$$x + 50° = 360°$$
$$x = 360° - 50° = 310°$$

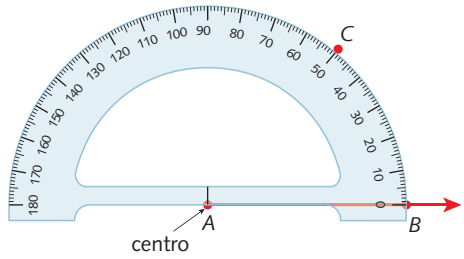
Logo, x é igual a 310°.

Como construir um ângulo com o transferidor

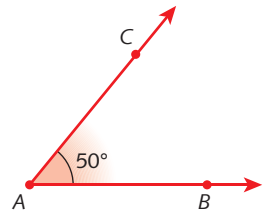
Observe a sequência utilizada na construção de um ângulo de 50°.

1º) Traçamos uma semirreta $\overrightarrow{AB}$.

2º) Colocamos o centro indicado no transferidor sobre o ponto A e a linha que contém o centro e o zero sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$. Depois, marcamos o ponto C, correspondente à medida de 50°.



3º) Traçamos a semirreta $\overrightarrow{AC}$, obtendo o ângulo $B\hat{A}C$, que mede 50°.



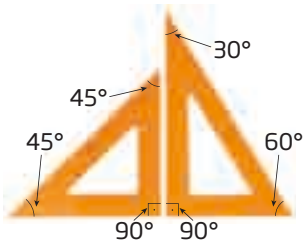
LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lendo e aprendendo

Ângulos no par de esquadros

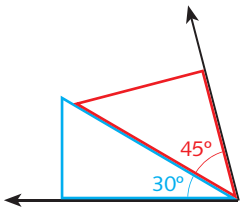
O par de esquadros é usado como instrumento de desenho geométrico. Em um dos esquadros encontramos um ângulo de 90° e dois ângulos de 45°, e no outro esquadro, ângulos de 30°, 60° e 90°.



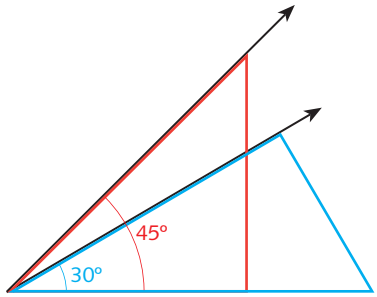
LÓPEZ BALABASQUER

Com um jogo de esquadros, além de ângulos de 30°, 45°, 60° e 90°, podemos, adicionando-os ou subtraindo-os, traçar alguns outros ângulos. Observe:

$30° + 45° = 75°$



$45° - 30° = 15°$



LUIZ RUBIO

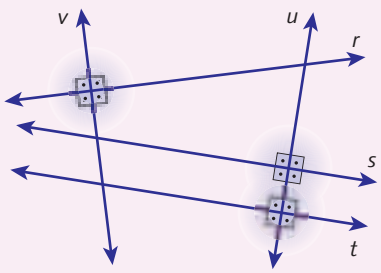
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva, no caderno, estas medidas de ângulos utilizando os símbolos de grau, minuto e segundo.

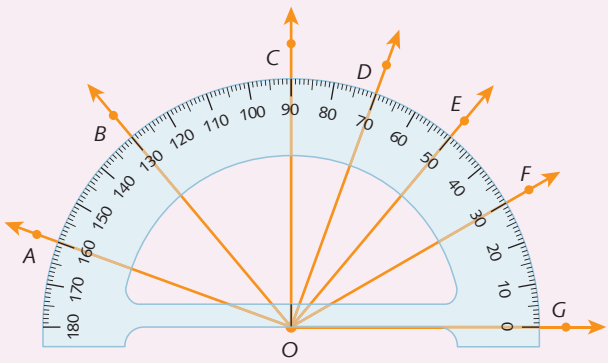
a) 60 graus 60°
b) 90 graus 90°
c) 102 graus e 35 minutos 102° 35'
d) 110 graus, 32 minutos e 48 segundos 110° 32' 48"

2 Observe a figura e indique os pares de retas perpendiculares. *r e v u e s u e t*



LUIZ RUBIO

3 Determine as medidas dos ângulos representados abaixo.



LUIZ RUBIO

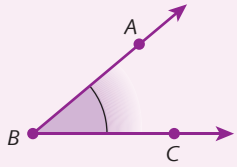
a) med($\widehat{GOF}$) 30°
b) med($\widehat{GOE}$) 50°
c) med($\widehat{DOC}$) 20°
d) med($\widehat{GOD}$) 70°
e) med($\widehat{AOD}$) 90°
f) med($\widehat{AOE}$) 110°
g) med($\widehat{COF}$) 60°
h) med($\widehat{AOG}$) 160°

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

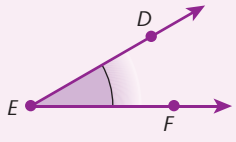
Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Com um transferidor, meça e registre no caderno a medida de cada um dos ângulos.

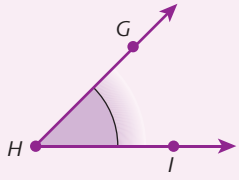
a) 40°



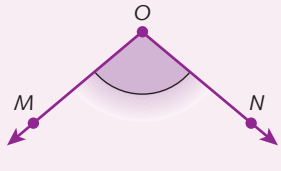
b) 30°



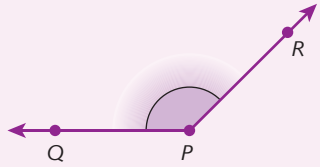
c) 45°



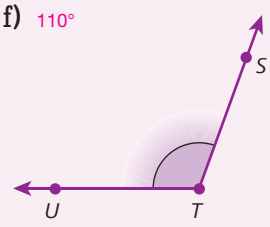
d) 100°



e) 135°



f) 110°



5 Observe o relógio abaixo e, com o auxílio do transferidor, responda às questões.

a) Quanto mede o ângulo pintado de azul? 30°

b) Quanto mede o menor ângulo formado pelos ponteiros? 165°

c) Quanto mede o maior ângulo formado pelos ponteiros? 195°

6 Com o auxílio de régua e transferidor, trace os ângulos pedidos e depois classifique-os.

a) ângulo $A\hat{O}B$ de 65° agudo

b) ângulo $M\hat{N}P$ de 150° obtuso

c) ângulo $C\hat{O}D$ de 90° reto

d) ângulo $D\hat{E}F$ de 180° raso

7 Com o auxílio de um transferidor e de uma régua, construa: Construção de figura.

a) um ângulo $A\hat{O}B$ de 35°;

b) um ângulo $M\hat{N}O$ de 120°;

c) um ângulo $X\hat{Y}Z$ de 85°;

d) um ângulo $R\hat{S}T$ de 170°.

8 O Elevador Lacerda, transformado em trave de futebol, e uma bola estufando a rede que o envolve foram utilizados como pôster oficial de Salvador na Copa do Mundo realizada no Brasil em 2014. O ângulo destacado no pôster tem quantos graus? Ele é reto, agudo ou obtuso?
50°; agudo

© FIFA

9 **(Enem)** Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o *skatista* brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade *skate* vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a: alternativa **d**

a) uma volta completa.

b) uma volta e meia.

c) duas voltas completas.

d) duas voltas e meia.

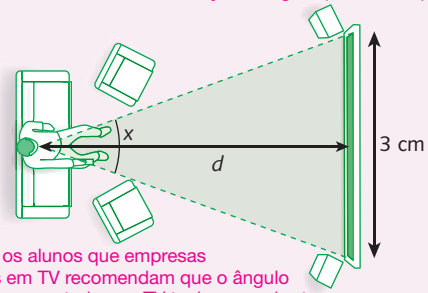
e) cinco voltas completas.

LUIZ RUBIO

GUILHERME CASAGRANDI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10 Com o auxílio de um transferidor, determine x, que representa a medida do ângulo de visão do espectador sentado no sofá em relação à televisão. Depois, construa em seu caderno uma tela de 6 cm e um ângulo de visão de 40°. Determine a distância d do olho do espectador ao centro da tela. 40°; construção de figura ($d \simeq 8{,}2$ cm)



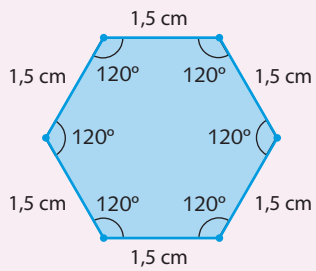
GUILHERME CASAGRANDI

Comente com os alunos que empresas especializadas em TV recomendam que o ângulo entre o local do espectador e a TV tenha uma abertura frontal de 40° em direção à tela.

11 Com um jogo de esquadros, trace um ângulo de: No item **f**, peça aos alunos que façam diferente do que está na seção Lendo e aprendendo.

a) 105°
b) 150°
c) 120°
d) 135°
e) 165°
f) 15°

12 Um hexágono regular é uma figura formada por seis lados de medidas iguais e ângulos internos de medida igual a 120°, conforme a figura abaixo.



Com o auxílio de régua e transferidor, construa um hexágono regular com 3 cm de lado. Construção de figura.

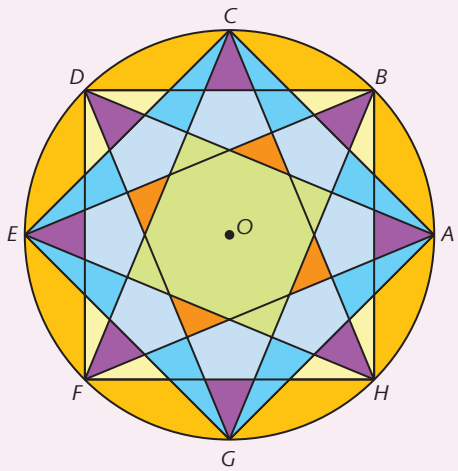
13 Observe este tipo de veículo.

RISTESKI GOCE/SHUTTERSTOCK

Este é um meio de transporte que funciona com o equilíbrio do condutor.

Na posição de descanso, o eixo vertical forma um ângulo correspondente a 112% de um ângulo reto, em relação à base. Descubra a medida desse ângulo, em grau e minuto. 100,8° = 100° 48'

14 Forme dupla com um colega e desenhem, em uma folha de papel, uma figura como a abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI

Para isso, iniciem traçando uma circunferência de centro O e raio 3 cm. Marquem um ponto A qualquer na circunferência. Para obter os pontos B, C, D, E, F, G e H, usem o transferidor, com zero em A e meçam, respectivamente, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° e 315°. Em seguida, para cada item, determinem as medidas dos ângulos e respondam à questão.

a) $\widehat{COE}$, $\widehat{CBE}$, $\widehat{CAE}$, $\widehat{CHE}$, $\widehat{CGE}$ e $\widehat{CFE}$. Que relação você percebe entre a medida de $\widehat{COE}$ (ângulo com vértice no centro da circunferência com lados que passam por C e E) e as medidas de $\widehat{CBE}$, $\widehat{CAE}$, $\widehat{CHE}$, $\widehat{CGE}$ e $\widehat{CFE}$ (ângulos com vértice na circunferência com lados que passam por C e E)?

b) $\widehat{COF}$, $\widehat{CBF}$, $\widehat{CAF}$, $\widehat{CHF}$ e $\widehat{CGF}$. Que relação você percebe entre a medida de $\widehat{COF}$ (ângulo com vértice no centro da circunferência com lados que passam por C e F) e as medidas de $\widehat{CBF}$, $\widehat{CAF}$, $\widehat{CHF}$ e $\widehat{CGF}$ (ângulos com vértice na circunferência com lados que passam por C e F)?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
GUILHERME CASAGRANDI

14. a) 90°, 45°, 45°, 45°, 45° e 45°
A medida de $\widehat{COE}$ é o dobro das medidas de $\widehat{CBE}$, $\widehat{CAE}$, $\widehat{CHE}$, $\widehat{CGE}$ e $\widehat{CFE}$.

b) 135°; 67,5°; 67,5°; 67,5° e 67,5°
A medida de $\widehat{COF}$ é o dobro das medidas de $\widehat{CBF}$, $\widehat{CAF}$, $\widehat{CHF}$ e $\widehat{CGF}$.

3 Transformação de unidades

Observe, nos exemplos a seguir, como efetuar transformações de unidades de medida de ângulo.

1 grau equivale a 60 minutos

$1° = 60'$

1 minuto equivale a 60 segundos

$1' = 60''$

GEORGE TUTUMI

- 30° em minutos

  $30° = 30 \cdot 1° = 30 \cdot 60' = 1\,800'$

  Logo: $30° = 1\,800'$

- 3° 35′ em segundos

  $3° = 3 \cdot 1° = 3 \cdot 60' = 180'$

  $180' + 35' = 215'$

  $215 \cdot 60'' = 12\,900''$

  Logo: $3° 35' = 12\,900''$

- 130′ em grau e minuto

130′	60
10′	2°

  Logo: $130' = 2° 10'$

- 150″ em minuto e segundo

150″	60
30″	2′

  Logo: $150'' = 2' 30''$

- 5° 35′ em minutos

  $5° = 5 \cdot 1° = 5 \cdot 60' = 300'$

  $300' + 35' = 335'$

  Logo: $5° 35' = 335'$

- 2° 20′ 40″ em segundos

  $2° = 2 \cdot 1° = 2 \cdot 60' = 120'$

  $120' = 120 \cdot 1' = 120 \cdot 60'' = 7\,200''$

  $20' = 20 \cdot 60'' = 1\,200''$

  $7\,200'' + 1\,200'' + 40'' = 8\,440''$

  Logo: $2° 20' 40'' = 8\,440''$

- 26 138″ em grau, minuto e segundo

26 138″	60		435′	60
213	435′	→	**15′**	**7°**
338				
38″				

  Logo: $26\,138'' = 7° 15' 38''$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Transforme as medidas indicadas conforme é pedido em cada item.

a) 27° em minuto; 1 620'

b) 13° 13' 13" em segundo; 47 593"

c) 12° 57' em minuto; 777'

d) 213' em grau e minuto; 3° e 33'

e) 36° em segundo; 129 600"

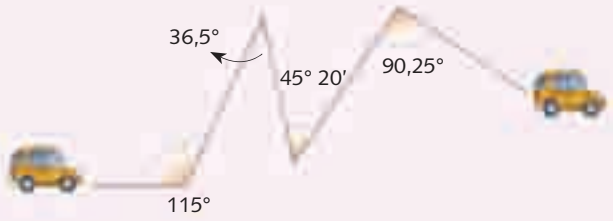
f) 310' em grau e minuto; 5° 10'

g) 17° 12' em segundo; 61 920"

h) 214 317" em grau, minuto e segundo. 59° 31' 57"

2 Imagine que um automóvel percorra uma trajetória conforme a ilustração abaixo. Transforme em segundos as medidas dos ângulos indicados.

414 000"; 131 400"; 163 200"; 324 900"



GEORGE TUTUMI

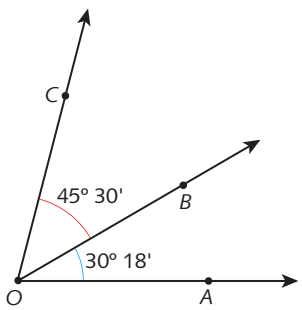
4 Operações com medidas de ângulos

Adição e subtração

Pedro traçou os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ conforme a ilustração ao lado.

Qual é a medida do ângulo $A\hat{O}C$?

Para responder a essa pergunta devemos adicionar as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$. Veja:



LUIZ RUBIO

- $30° 18' + 45° 30'$

$$\begin{array}{r} 30° 18' \\ +\ 45° 30' \\ \hline 75° 48' \end{array}$$

Observe que adicionamos minutos com minutos e graus com graus.

Portanto, a medida do ângulo $A\hat{O}C$ é 75° 48'.

Observe outro exemplo:

- $10° 36' 30" + 23° 45' 50"$

Agora, adicionamos segundos com segundos, minutos com minutos e graus com graus.

$$\begin{array}{r} 10° 36' 30" \\ +\ 23° 45' 50" \\ \hline 33° 81' 80" \end{array}$$

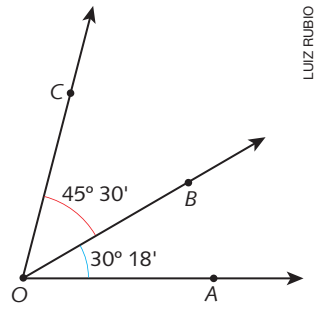
Esse resultado pode ser escrito de outra forma.
Veja que 80" = 1' 20", assim:
33° 81' 80" = 33° 82' 20"
Esse resultado pode ser escrito de outra forma.
Veja que 82' = 1° 22', assim:
33° 82' 20" = 34° 22' 20"

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Qual é a diferença entre as medidas dos ângulos $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$?

Para responder a essa pergunta devemos subtrair 45° 30′ de 30° 18′. Veja:

$$\begin{array}{r} 45°\ 30' \\ -\ 30°\ 18' \\ \hline 15°\ 12' \end{array}$$



LUIZ RUBIO

Observe que subtraímos minutos de minutos e graus de graus.

Portanto, a diferença entre as medidas dos ângulos $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ é 15° 12′.

Veja outros exemplos:

- 38° 45′ 50″ − 27° 32′ 35″

  Agora, subtraímos segundos de segundos, minutos de minutos e graus de graus.

$$\begin{array}{r} 38°\ 45'\ 50'' \\ -\ 27°\ 32'\ 35'' \\ \hline 11°\ 13'\ 15'' \end{array}$$

  Portanto, 38° 45′ 50″ − 27° 32′ 35″ = 11° 13′ 15″

- 80° 48′ 30″ − 70° 58′ 55″

  Nesse caso, podemos trocar graus por minutos e minutos por segundos para poder efetuar a subtração.

  Observe que: $80°\ 48'\ 30'' = 80°\ \underline{47'\ 90''} = 79°\ \underline{107'\ 90''}$

  Retiramos 1′ dos 48′ e adicionamos 60″ aos 30″ já existentes.

  Retiramos 1° dos 80° e adicionamos 60′ aos 47′ já existentes.

$$\begin{array}{r} 79°\ 107'\ 90'' \\ -\ 70°\ 58'\ 55'' \\ \hline 9°\ 49'\ 35'' \end{array}$$

Portanto, 80° 48′ 30″ − 70° 58′ 55″ = 9° 49′ 35″

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue os cálculos.

a) 25° 12' + 37° 20' 62° 32'

b) 86° 52' 50" + 39° 43' 20" 126° 36' 10"

c) 45° 12' 37" + 47° 49' 38" 93° 2' 15"

d) 42° 30' + 47° 30' 90°

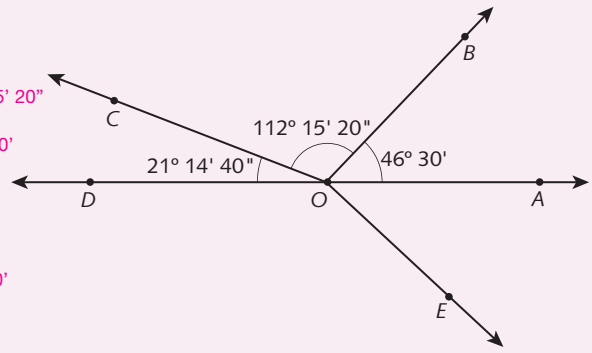
e) 75° 21' − 49° 33' 25° 48'

f) 47° 39' 25" − 29° 31' 45" 18° 7' 40"

g) 80° 49' 32" − 73° 51' 46" 6° 57' 46"

h) 90° − 35° 49' 46" 54° 10' 14"

2 Observe a figura ao lado e responda.



LUIZ RUBIO

a) Qual é a medida do ângulo $A\hat{O}C$? 158° 45' 20"

b) Qual é a medida do ângulo $B\hat{O}D$? 133° 30'

c) Qual é a medida do ângulo $A\hat{O}D$? 180°

d) Qual é a medida do ângulo $A\hat{O}E$ sabendo que med$(E\hat{O}D) = 133°\ 30'$? 46° 30'

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Multiplicação

Para multiplicar um número natural pela medida de um ângulo, devemos multiplicar esse número pelos segundos, pelos minutos e pelos graus dessa medida. Depois, se necessário, devemos fazer as transformações de unidades. Veja os exemplos:

- $2 \cdot (36° 25')$

$$\begin{array}{r} 36° \ 25' \\ \times \quad 2 \\ \hline 72° \ 50' \end{array}$$

- $4 \cdot (15° 12' 10'')$

$$\begin{array}{r} 15° \ 12' \ 10'' \\ \times \quad 4 \\ \hline 60° \ 48' \ 40'' \end{array}$$

- $2 \cdot (30° 10' 20'')$

$$\begin{array}{r} 30° \ 10' \ 20'' \\ \times \quad 2 \\ \hline 60° \ 20' \ 40'' \end{array}$$

Outro exemplo:

- $5 \cdot (12° 36' 40'')$

$$\begin{array}{r} 12° \ 36' \ 40'' \\ \times \quad 5 \\ \hline 60° \ 180' \ 200'' \\ 60° \ 183' \ 20'' \\ 63° \ 3' \ 20'' \end{array}$$

Como $200'' = 3' 20''$, adicionamos $3'$ aos $180'$ já existentes.

Como $183' = 3° 3'$, adicionamos $3°$ aos $60°$ já existentes.

O senhor Alberto quer saber a medida do ângulo formado por dois raios consecutivos da roda da frente de sua bicicleta, mas ele não dispõe de transferidor. Como ele poderia fazer para descobrir essa medida?

BMW GROUP BRASIL

Observando a roda da frente, percebemos que há 20 ângulos de mesma medida; logo, essa medida é o quociente de 360° por 20.

Dividindo, temos:

$$\begin{array}{r|l} 360° & 20 \\ \hline 160 & 18° \\ 0 & \end{array}$$

Cada ângulo da roda da frente da bicicleta do senhor Alberto, formado por dois raios consecutivos, mede 18°.

Divisão

Para dividir a medida de um ângulo por um número natural, devemos dividir inicialmente os graus, depois os minutos e por fim os segundos da medida por esse número. Quando necessário, devemos fazer as transformações de unidades. Veja os exemplos:

- $(40° 20') : 2$

$$\begin{array}{r|l} 40° \ 20' & 2 \\ \hline 00 \ \ 00 & 20° \ 10' \end{array}$$

- $(45° 20' 16'') : 4$

$$\begin{array}{r|l} 45° \quad 20' \ 16'' & 4 \\ \hline 1° \rightarrow +60' \ 00'' & 11° \ 20' \ 4'' \\ 80' & \\ 0' & \end{array}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Outro exemplo:

- $(50° 17' 30'') : 6$

$$\begin{array}{rrr|l} 50° & 17' & 30'' & 6 \\ \cancel{2°} \rightarrow & +120' & +300'' & 8° 22' 55'' \\ & 137' & 330'' & \\ & \cancel{5'} & 00 & \end{array}$$

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Efetue os cálculos.

a) $6 \cdot (45° 12')$ 271° 12'

b) $4 \cdot (12° 30')$ 50°

c) $7 \cdot (1° 10' 13'')$ 8° 11' 31"

d) $5 \cdot (45° 12' 56'')$ 226° 4' 40"

e) $8 \cdot (25° 20' 20'')$ 202° 42' 40"

f) $98° 56' : 2$ 49° 28'

g) $15° : 8$ 1° 52' 30"

h) $84° 40' 20'' : 2$ 42° 20' 10"

i) $39° 11' 40'' : 2$ 19° 35' 50"

j) $42° 35' 20'' : 8$ 5° 19' 25"

2 Calcule.

a) O triplo de 47° 29'. 142° 27'

b) O quádruplo de 23° 19' 15". 93° 17'

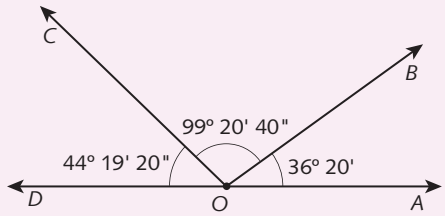
c) O sêxtuplo de 20° 15' 20". 121° 32'

d) A metade de 97°. 48° 30'

e) A terça parte de 98° 54'. 32° 58'

f) A quarta parte de 60° 40' 20". 15° 10' 5"

3 Observe a figura e efetue os cálculos no caderno.



LUIZ RUBIO

a) $med(\widehat{AOB}) : 4$ 9° 5'

b) $2 \cdot med(\widehat{BOC})$ 198° 41' 20"

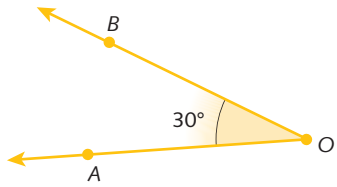
c) $3 \cdot med(\widehat{COD})$ 132° 58'

d) $med(\widehat{AOC}) : 8$ 16° 57' 35"

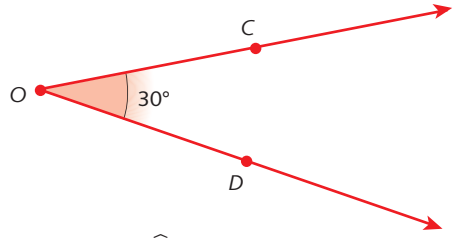
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5 Ângulos congruentes

Observe os ângulos abaixo.



$med(\widehat{AOB}) = 30°$



LUIZ RUBIO

$med(\widehat{COD}) = 30°$

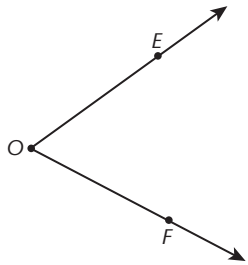
Verifique que $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$ têm a mesma medida. Eles são **ângulos congruentes**.

Indicamos: $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$

Ângulos **congruentes** são aqueles que têm a mesma medida.

Como construir, com régua e compasso, um ângulo congruente a outro ângulo dado

Dado o ângulo $E\widehat{O}F$, abaixo, construiremos o ângulo $G\widehat{H}I$, congruente a ele. Siga as etapas e observe as figuras:

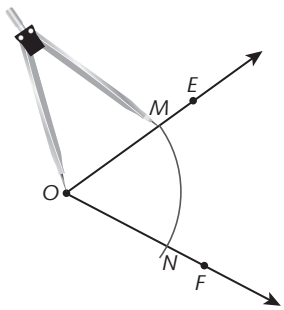


LUIZ RUBIO

1º) Traçamos uma semirreta r e marcamos o ponto H sobre ela.

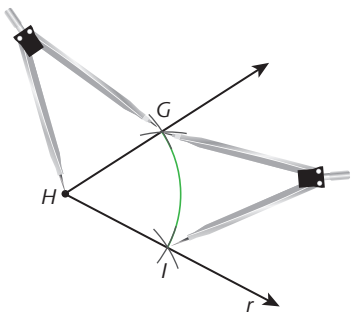
LUIZ RUBIO

2º) Centramos o compasso em O e, com uma abertura qualquer, determinamos os pontos M e N sobre as semirretas $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OF}$, respectivamente.



LUIZ RUBIO

3º) Com a mesma abertura anterior, centramos o compasso em H e traçamos um arco determinando o ponto I sobre r. A seguir, centramos o compasso em I e, com abertura igual à distância entre M e N, traçamos um novo arco determinando o ponto G, como você vê na figura. Traçamos a semirreta HG, obtendo o ângulo $G\widehat{H}I$.



LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

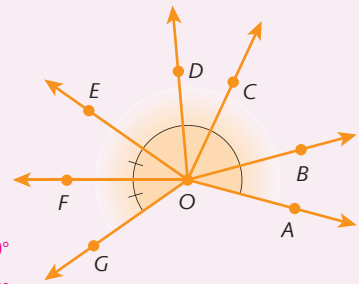
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Com um transferidor, determine a medida dos ângulos da figura abaixo. Depois, indique os ângulos congruentes.

$A\widehat{O}B \cong C\widehat{O}D$; $B\widehat{O}C \cong D\widehat{O}E$; $E\widehat{O}F \cong F\widehat{O}G$

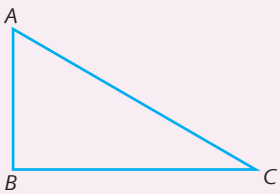
a) $A\widehat{O}B$ 30°
b) $B\widehat{O}C$ 50°
c) $C\widehat{O}D$ 30°
d) $D\widehat{O}E$ 50°
e) $E\widehat{O}F$ 35°
f) $F\widehat{O}G$ 35°
g) $A\widehat{O}C$ 80°
h) $E\widehat{O}A$ 160°
i) $F\widehat{O}C$ 115°
j) $E\widehat{O}B$ 130°



LUIZ RUBIO

2 Observe a figura e, utilizando régua e compasso, construa um ângulo $E\widehat{D}F$ congruente a $B\widehat{A}C$ e um ângulo $D\widehat{F}E$ congruente a $A\widehat{C}B$.

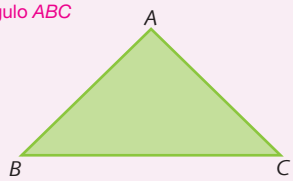
Construção de figura.



LUIZ RUBIO

3 Verifique, com um transferidor, se o triângulo ABC é um triângulo isósceles.

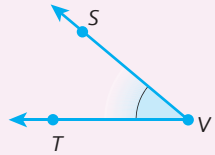
Sim, o triângulo ABC é isosceles.

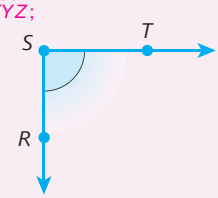


LUIZ RUBIO

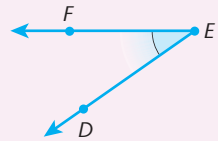
4 Com o auxílio de um transferidor, determine no caderno os pares de ângulos congruentes.

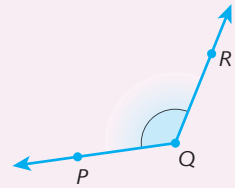
$S\widehat{V}T \cong P\widehat{O}Q$; $R\widehat{S}T \cong N\widehat{O}M \cong K\widehat{Y}Z$; $F\widehat{E}D \cong C\widehat{B}A$

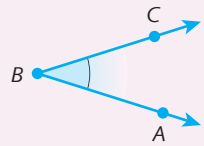


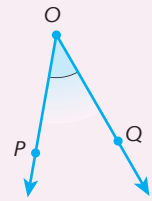


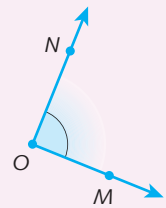
LUIZ RUBIO

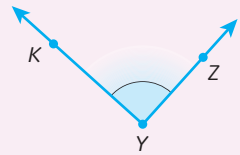






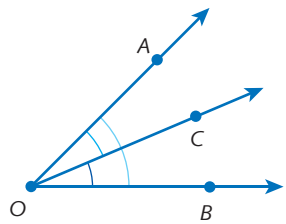






6 Ângulos adjacentes

Observe na figura abaixo os ângulos $A\widehat{O}C$, $C\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}B$.



LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

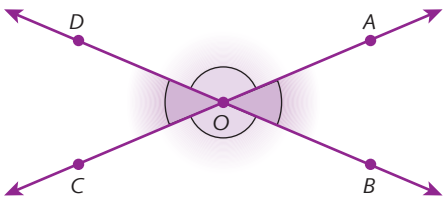
Os ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ têm em comum apenas um lado ($\overrightarrow{OC}$). Os ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são ângulos adjacentes.

Observe que a medida de $A\hat{O}B$ é igual à soma das medidas de $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$.

$$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(A\hat{O}C) + \text{med}(C\hat{O}B)$$

Observações

1. Dizer que dois ângulos adjacentes têm um lado comum implica dizer que eles têm a mesma origem.
2. Retas concorrentes determinam ângulos adjacentes. Veja o exemplo:



LUIZ RUBIO

$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$
$B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$
$C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$
$D\hat{O}A$ e $A\hat{O}B$

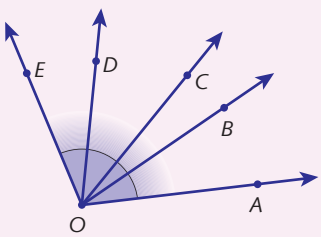
São pares de ângulos adjacentes.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe a figura abaixo e indique pares de ângulos adjacentes.

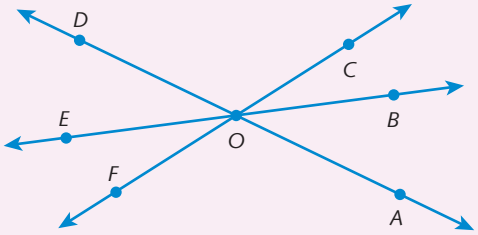
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$, $A\hat{O}D$ e $D\hat{O}E$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}E$, $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$, AOC e COE.



2 Observe a figura seguinte e indique:

a) dois ângulos adjacentes ao ângulo $A\hat{O}B$;

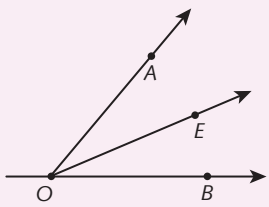
b) dois ângulos adjacentes ao ângulo $D\hat{O}E$.



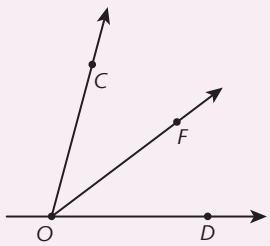
Exemplos de resposta: **a)** $A\hat{O}F$ e $C\hat{O}D$; **b)** $D\hat{O}B$ e $A\hat{O}E$

3 Determine:

a) a medida do ângulo $A\hat{O}B$ sabendo que a $\text{med}(A\hat{O}E) = 27°$ e $\text{med}(E\hat{O}B) = 23°$. 50°



b) a medida do ângulo $F\hat{O}D$ sabendo que a $\text{med}(C\hat{O}D) = 75°$ e $\text{med}(C\hat{O}F) = 38°$. 37°



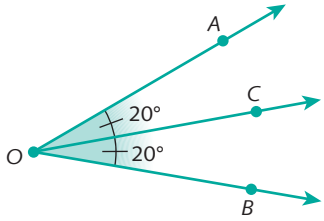
LUIZ RUBIO

LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7 Bissetriz de um ângulo

Observe a figura abaixo.



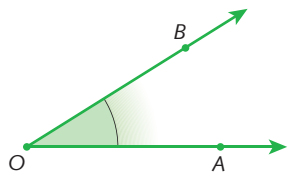
$\text{med}(A\hat{O}B) = 40°$
$\text{med}(A\hat{O}C) = 20°$
$\text{med}(C\hat{O}B) = 20°$

LUIZ RUBIO

Verifique que a semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos ($A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$) congruentes. Nesse caso, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a **bissetriz** do ângulo $A\hat{O}B$.

A **bissetriz de um ângulo** é a semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo, que o divide em dois ângulos congruentes.

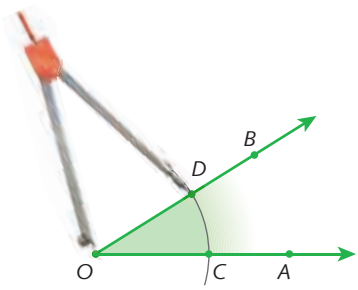
Como construir a bissetriz de um ângulo utilizando régua e compasso



LUIZ RUBIO

Acompanhe a sequência para determinar a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

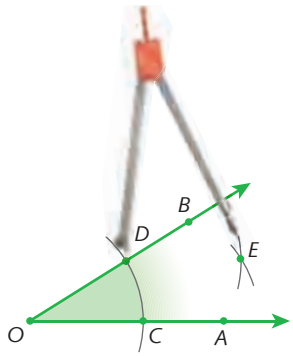
1º) Centramos o compasso em O e, com uma abertura qualquer, determinamos os pontos C e D sobre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.



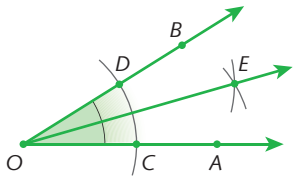
LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2º) Centramos o compasso primeiro em C e depois em D e fazemos assim: com uma abertura superior à metade da distância de C a D, traçamos arcos que se cruzam em E.



3º) Traçamos $\overrightarrow{OE}$, determinando a bissetriz de $A\hat{O}B$.

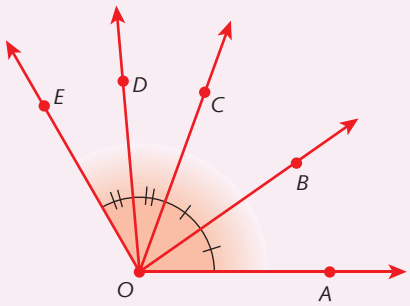


LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Na ilustração abaixo $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz de $A\hat{O}C$ e $\overrightarrow{OD}$ é a bissetriz de $C\hat{O}E$.

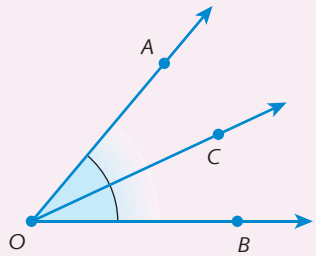


a) Qual é a medida de $A\hat{O}B$, se $\text{med}(B\hat{O}C) = 35°$? 35°

b) Qual é a medida de $C\hat{O}D$, se $\text{med}(D\hat{O}E) = 25°$? 25°

c) Qual é a medida de $D\hat{O}A$? 95°

2 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$ e $\text{med}(A\hat{O}C) = 25°$. Determine as medidas de $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$. 50° e 25°



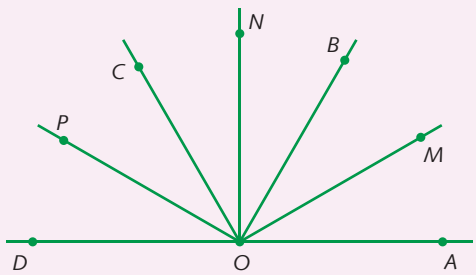
3 Construa, com a ajuda de um transferidor, um ângulo de 80°. A seguir, utilizando régua e compasso, determine a bissetriz desse ângulo. Escreva no caderno a medida de cada ângulo obtido.
Construção de figura; 40°.

4 No caderno, utilizando régua e compasso:

a) construa um ângulo qualquer;

b) divida o ângulo em quatro ângulos congruentes. Construção de figura.

5 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, $\overrightarrow{ON}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$, e $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $C\hat{O}D$. Determine: $\text{med}(P\hat{O}D) + \text{med}(M\hat{O}N)$. 90°



6 Construa com o auxílio do transferidor, os ângulos abaixo. Depois, trace as respectivas bissetrizes. Construção de figura.

a) 90°

b) 47°

c) 102°

d) 140°

LUIZ RUBIO

LUIZ RUBIO

LUIZ RUBIO

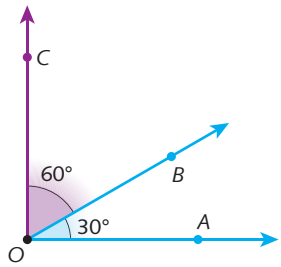
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8 Ângulos complementares

Observe os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ na figura ao lado.

Verifique que: med($A\hat{O}B$) + med($B\hat{O}C$) = 90°

Nesse caso, dizemos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são **complementares**.



LUIZ RUBIO

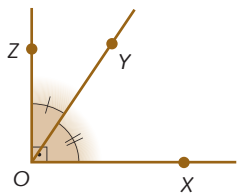
> Dois ângulos são denominados **complementares** quando a soma de suas medidas é 90°.

GEORGE TUTUMI

Dizemos que o ângulo de 30° é o complemento do ângulo de 60°, e vice-versa.

Observação

Os ângulos $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$ da figura ao lado, além de complementares, são adjacentes. Esses ângulos são chamados de ângulos **adjacentes complementares**.



LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule a medida do complemento de cada um dos ângulos cuja medida está abaixo.

a) 76° 14°
b) 46° 44°
c) 38° 52°
d) 0° 90°
e) 82° 8°
f) 85° 5°
g) 26° 64°
h) 90° 0°

2 Determine a medida do complemento de cada ângulo cuja medida está abaixo.

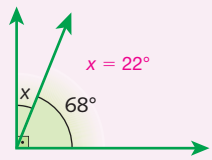
a) 36° 48' 53° 12'
b) 82° 50' 7° 10'
c) 79° 12' 47" 10° 47' 13"
d) 49° 28' 49" 40° 31' 11"

3 Com régua e transferidor, desenhe um triângulo retângulo qualquer. A seguir, meça os ângulos agudos desse triângulo. Eles são ângulos complementares?

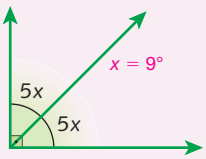
Sim, são complementares.

4 Calcule a medida indicada pela letra x em cada item.

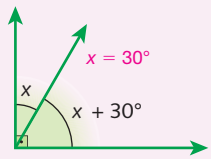
a)



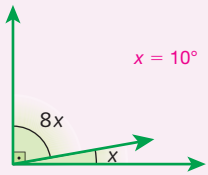
c)



b)



d)



5 Dois ângulos são adjacentes complementares, e um deles mede 78°. Determine a medida do outro ângulo. 12°

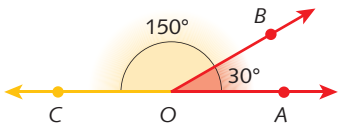
6 Dois ângulos são adjacentes complementares, e um deles mede 48° 36' 28". Calcule a medida do outro ângulo. 41° 23' 32"

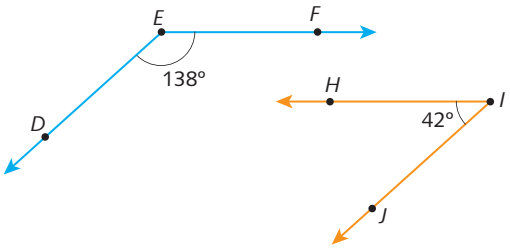
LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9 Ângulos suplementares

Observe os pares de ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ e $D\hat{E}F$ e $H\hat{I}J$, nas figuras abaixo.





LUIZ RUBIO

Verifique que:

$$\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) = 180° \text{ e } \text{med}(D\hat{E}F) + \text{med}(H\hat{I}J) = 180°$$

Nesse caso, dizemos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são **ângulos suplementares**.

Também $D\hat{E}F$ e $H\hat{I}J$ são ângulos suplementares.

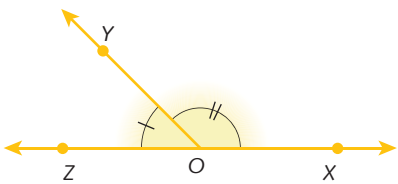
Dois ângulos são denominados **ângulos suplementares** quando a soma de suas medidas é 180°.

GEORGE TUTUMI

Dizemos que o ângulo de 30° é o suplemento do ângulo de 150°, e vice-versa. Dizemos também que o ângulo de 138° é o suplemento do ângulo de 42°, e vice-versa.

Observação

Os ângulos $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$, da figura abaixo, além de suplementares, são adjacentes. Esses ângulos são chamados de ângulos **adjacentes suplementares**.



LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule a medida do suplemento de cada ângulo cuja medida está abaixo.

a) 76° 104°
b) 30° 150°
c) 0° 180°
d) 128° 52°
e) 175° 5°
f) 180° 0°

2 Determine a medida do suplemento de cada ângulo cuja medida está abaixo.

a) 136° 48' 43° 12'
b) 82° 48' 97° 12'
c) 103° 25' 36" 76° 34' 24"
d) 29° 45' 35" 150° 14' 25"

3. Espera-se que os alunos concluam que o ângulo $D\hat{O}E$ sempre medirá 90°, pois ele terá como medida a soma das metades das medidas de dois ângulos suplementares, o que equivale à metade da soma das medidas de dois ângulos suplementares, ou seja, a metade 180°.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Desenhe dois ângulos, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, suplementares e adjacentes quaisquer. Troque de caderno com um colega para que cada um trace as bissetrizes $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$ desses ângulos no caderno do outro. A seguir, destroquem os cadernos e meçam o ângulo $D\hat{O}E$.

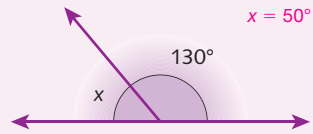
a) A que conclusão vocês chegaram sobre a medida de $D\hat{O}E$?

b) Justifiquem essa conclusão.

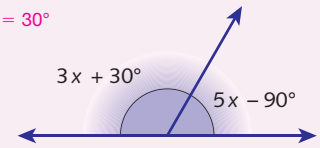
4 Dois ângulos são adjacentes suplementares, e um deles mede 106°. Determine a medida do outro ângulo. 74°

5 Calcule a medida indicada pela letra x em cada item.

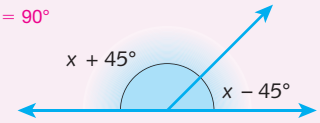
a)



b) $x = 30°$



c) $x = 90°$



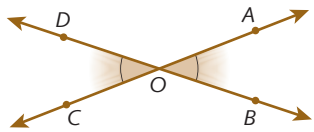
LUIZ RUBIO

10 Ângulos opostos pelo vértice

No destaque da fotografia podemos observar elementos que lembram retas que se cruzam formando quatro ângulos.

STEVE PEPPLE/SHUTTERSTOCK

Observe, agora, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ formados pelas retas concorrentes $\overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{DB}$, que se interceptam no ponto O na figura abaixo.



LUIZ RUBIO

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ têm o mesmo vértice, que é o ponto O, e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ (lados do ângulo $A\hat{O}B$) são opostas, respectivamente, às semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ (lados do ângulo $C\hat{O}D$).

Nesse caso, dizemos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são **opostos pelo vértice** (indicamos o.p.v.).

> Dois ângulos são **opostos pelo vértice** quando os lados de um deles são semirretas opostas aos lados do outro.

Verifique que as retas $\overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{DB}$ também definem os ângulos $D\hat{O}A$ e $C\hat{O}B$. Esses ângulos têm o vértice O em comum e as semirretas $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OA}$ são opostas, respectivamente, às semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$. Então, os ângulos $D\hat{O}A$ e $C\hat{O}B$ também são opostos pelo vértice.

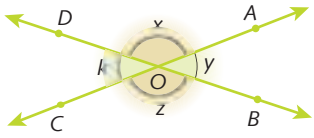
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Propriedade dos ângulos opostos pelo vértice

Na figura ao lado, vamos indicar:

med($A\hat{O}D$) = x med($C\hat{O}B$) = z

med($A\hat{O}B$) = y med($C\hat{O}D$) = k



LUIZ RUBIO

Sabemos que:

$x + y = 180°$ ← ângulos adjacentes suplementares

$x + k = 180°$ ← ângulos adjacentes suplementares

Então:

$x + y = x + k$

Subtraindo x de ambos os membros da igualdade, obtemos: $y = k$

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, que são opostos pelo vértice (o.p.v), têm a mesma medida.

> Dois ângulos opostos pelo vértice têm mesma medida.

Podemos determinar x, em grau,na figura abaixo utilizando a propriedade dos ângulos opostos pelo vértice.

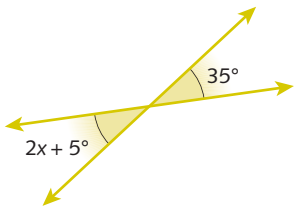
$2x + 5° = 35°$ ← ângulos o.p.v.

$2x + 5° - 5° = 35° - 5°$

$2x = 30°$

$2x \cdot \frac{1}{2} = 30° \cdot \frac{1}{2}$

$x = 15°$

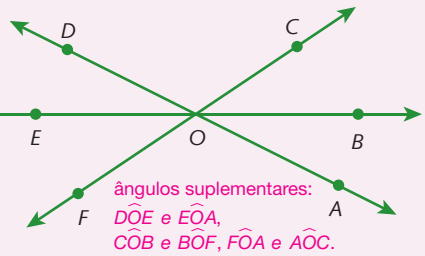


LUIZ RUBIO

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe a figura e determine três pares de ângulos opostos pelo vértice e três pares de ângulos adjacentes suplementares.



LUIZ RUBIO

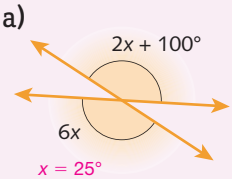
Exemplos de resposta:

ângulos o.p.v.:
$D\hat{O}E$ e $B\hat{O}A$,
$E\hat{O}F$ e $C\hat{O}B$,
$D\hat{O}C$ e $F\hat{O}A$;

ângulos suplementares:
$D\hat{O}E$ e $E\hat{O}A$,
$C\hat{O}B$ e $B\hat{O}F$, $F\hat{O}A$ e $A\hat{O}C$.

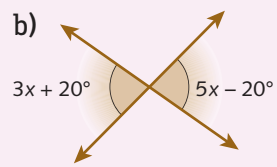
2 Determine a medida indicada pela letra x nas figuras abaixo.

a)



$x = 25°$

b)



$x = 20°$

LUIZ RUBIO

3 Reescreva as sentenças verdadeiras.

a) Dois ângulos opostos pelo vértice nunca são suplementares.

b) Dois ângulos adjacentes são sempre suplementares.

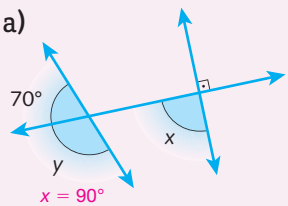
c) Dois ângulos adjacentes e suplementares formam um ângulo raso.

d) O suplemento de um ângulo reto é um ângulo reto.

alternativas **c** e **d**

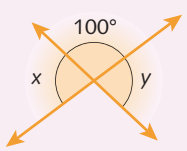
4 Determine as medidas indicadas pelas letras x e y nas figuras abaixo.

a)



$x = 90°$
$y = 110°$

b)



$x = y = 80°$

LUIZ RUBIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Neste capítulo você viu que uma das manobras do *windsurf* consiste em girar a prancha 180°. Cite outros esportes em que são utilizados giros. Exemplos de resposta: o *skate*, o *surf*, o *snowboard*.

2 No quadro abaixo estão escritas diversas palavras. Selecione e escreva, no seu caderno, as palavras relacionadas aos elementos de um ângulo. Vértice, lado, semirreta.

vértice	aresta	face	lado	semirreta

3 Reescreva a frase abaixo no seu caderno, completando as lacunas com as palavras adequadas:

O instrumento usado para medir e construir ângulos é o transferidor. Porém, na agrimensura, utiliza-se o ■ (teodolito/sextante) e nas navegações o ■ (teodolito/sextante). teodolito; sextante

4 Explique a relação entre grau, minuto e segundo.

1 grau corresponde a 60 minutos e 1 minuto corresponde a 60 segundos.

5 Relacione, no caderno, as colunas:

I – C; II – A; III – E; IV – B e V – D.

I. Ângulo reto	**A** - Medida menor que 90°.
II. Ângulo agudo	**B** - Dois ângulos cuja soma das medidas é 90°.
III. Ângulo obtuso	**C** - Aquele que mede 90°.
IV. Ângulos complementares	**D** - Dois ângulos cuja soma das medidas é 180°.
V. Ângulos suplementares	**E** - Medida maior que 90° e menor que 180°.

6 Qual é a medida de um ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos suplementares adjacentes? 90°

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Aplicando

1 Quantos graus tem cada uma dessas medidas de ângulo?

a) 60' 1°

b) 600' 10°

c) 180' 3°

d) 3 600" 1°

2 Quantos segundos correspondem a 20°? 72 000"

3 Quantos minutos tem cada uma dessas medidas de ângulo?

a) 57° 3 420'

b) 120° 37' 7 237'

c) 49° 35' 2 975'

d) 95° 35' 5 735'

4 Observe o ângulo indicado na imagem e, com o auxílio de um transferidor, determine sua medida aproximada, em grau. 40°

EDUARDO RIVERO/SHUTTERSTOCK

Ponte de la Mujer: obra do arquiteto espanhol Santiago Calatrava, situada sobre o rio Puerto Madero, em Buenos Aires, Argentina.

5 Paulinho brinca com seu robô, que funciona por controle remoto. O menino transmite ao robô os seguintes comandos:

1º) Caminhar 12 passos para a frente.

2º) Girar 120° à direita e caminhar mais 20 passos.

3º) Girar 150° à direita e caminhar mais 16 passos.

Faça um desenho do trajeto do robô, representando cada passo por 1 cm. Construção de figura.

6 **(Enem)** As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeça que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos. alternativa c

figura A

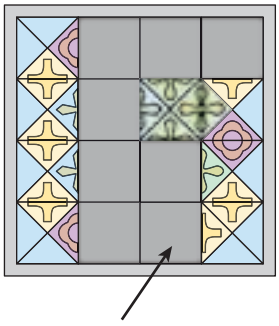
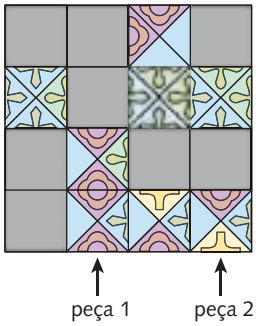


figura B



Disponível em: <http://pt.eternityii.com>. Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça:

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.

b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.

c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.

d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.

e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

7 Efetue as operações.

a) $82° 45' + 47° 30'$ $130° 15'$

b) $45° 12' 47'' + 47° 49' 48''$ $93° 2' 35''$

c) $90° - 60° 45'$ $29° 15'$

d) $45° 20' 20'' - 37° 47' 28''$ $7° 32' 52''$

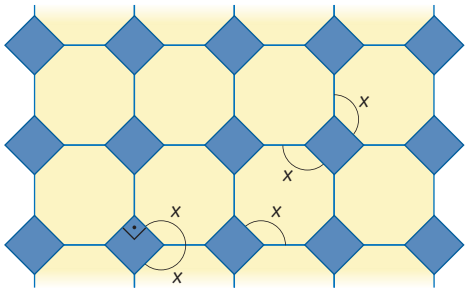
e) $4 \cdot (39° 48')$ $159° 12'$

f) $5 \cdot (13° 18' 20'')$ $66° 31' 40''$

g) $89° : 2$ $44° 30'$

h) $(49° 27') : 2$ $24° 43' 30''$

8 A figura abaixo representa o piso de uma sala. O mosaico é formado por quadrados e octógonos regulares (os lados têm a mesma medida de comprimento e os ângulos internos são congruentes). Calcule, em grau, a medida indicada pela letra de x de cada um dos ângulos internos do octógono regular. $135°$



9 Calcule a medida indicada pela letra x, em grau, sabendo que os ângulos de medidas $6x - 40°$ e $4x + 80°$ são adjacentes suplementares. $14°$

10 Quantos graus mede o ângulo cuja medida é igual a $\frac{5}{4}$ da medida do seu suplemento? $100°$

11 Qual é o ângulo cuja soma da medida do seu complemento com a do seu suplemento é 190°? $40°$

12 Um ângulo tem medida igual a oito vezes a metade da medida do seu suplemento. Qual é a medida desse ângulo? $144°$

13 Dois ângulos opostos pelo vértice medem, em grau, $4m - 20°$ e $3m + 10°$. Qual é a soma das medidas desses ângulos na mesma unidade? $200°$

14 Dois ângulos adjacentes são complementares. Qual é a medida do ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos? $45°$

15 Qual é a medida do complemento do ângulo que mede $43° 12' 37''$? $46° 47' 23''$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
GUILHERME CASAGRANDI

GUILHERME CASAGRANDI

CAPÍTULO

7 RAZÃO

DMITRY KALINOVSKY/SHUTTERSTOCK

A retroescavadeira é empregada em pedreiras e em grandes construções.

Neste capítulo, vamos trabalhar o conceito de razão, bem como sua aplicação na solução de problemas que envolvem grandezas da mesma natureza e de naturezas diferentes. Com base na fotografia da abertura deste capítulo, discuta com os alunos as ideias básicas sobre razão entre dois números.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

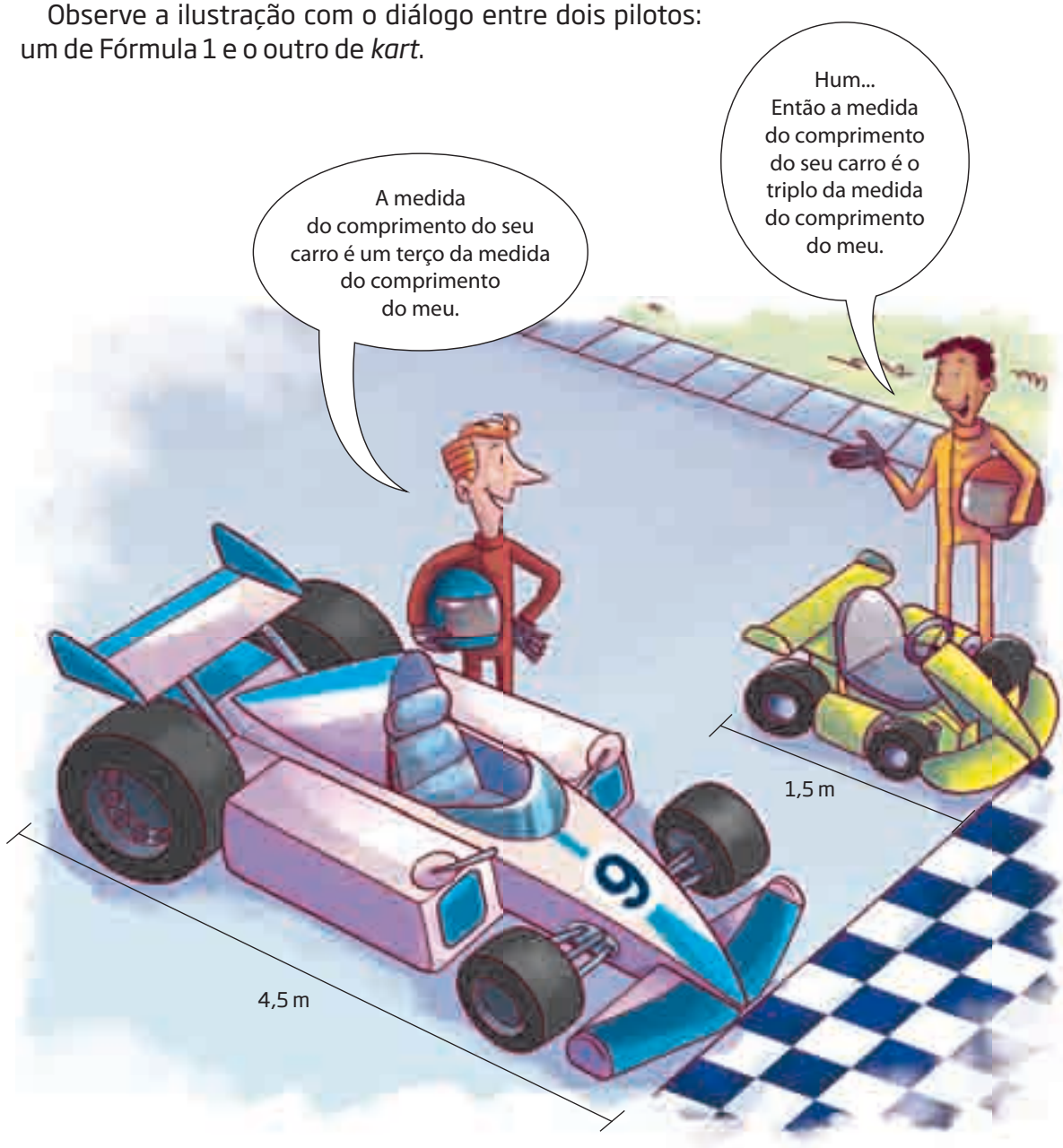
Retroescavadeira é um trator com duas pás: uma na parte dianteira e outra na parte traseira. Na imagem abaixo, as medidas dos diâmetros das rodas traseiras e dianteiras da retroescavadeira são, respectivamente, 1 208 mm e 755 mm.

- Como poderíamos representar uma relação entre as medidas dos diâmetros das rodas traseira e dianteira nessa ordem? Poderia ser por meio da divisão de uma medida pela outra, expressa por uma fração: $\frac{1208}{755}$.
- Quanto uma medida é maior que a outra em porcentagem? 60%

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe a ilustração com o diálogo entre dois pilotos: um de Fórmula 1 e o outro de *kart*.



JOSÉ LUÍS JUHAS

- Qual é a medida do comprimento do carro de Fórmula 1? 4,5 m
- Qual é a medida do comprimento do carro de *kart*? 1,5 m
- Explique como os pilotos chegaram a essas conclusões.

O piloto de Fórmula 1 obteve o quociente entre a medida do comprimento do carro de *kart* e a medida do comprimento do carro de Fórmula 1. O piloto de *kart* calculou o inverso: obteve o quociente entre a medida do comprimento do carro de Fórmula 1 e a medida do comprimento do carro de *kart*.

Neste capítulo, vamos estudar **razão**, bem como sua aplicação na solução de problemas que envolvem grandezas de mesma natureza e de naturezas diferentes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Razão

Os jogadores James Rodriguez (Colômbia), Thomas Müller (Alemanha), Neymar (Brasil), Messi (Argentina) e Van Persie (Holanda) foram os cinco maiores artilheiros da Copa do Mundo de Futebol realizada no Brasil, em 2014. Eles marcaram 6, 5, 4, 4 e 4 gols, respectivamente.

O rendimento de cada jogador pode ser obtido pela **razão** entre o número de gols que cada um desses jogadores marcou e o número de partidas que cada um deles disputou:

James Rodriguez: $\frac{6}{5}$ (6 gols em 5 jogos)

Thomas Müller: $\frac{5}{7}$ (5 gols em 7 jogos)

Neymar: $\frac{4}{5}$ (4 gols em 5 jogos)

Messi: $\frac{4}{7}$ (4 gols em 7 jogos)

Van Persie: $\frac{4}{6}$ (4 gols em 6 jogos)

KYODO/AP PHOTO/GLOW IMAGES

Neymar e James Rodriguez no jogo entre Brasil e Colômbia, em Fortaleza (CE), 2014.

A razão entre dois números, a e b, com $b \neq 0$, nessa ordem, é dada por $\frac{a}{b}$.

Oriente os alunos que, para o cálculo da razão, eles devem seguir a ordem em que os dados foram fornecidos. Por exemplo:
• A razão entre os números 2 e 3 é $\frac{2}{3}$; • a razão entre os números 3 e 2 é $\frac{3}{2}$.

A palavra *razão* tem origem no latim *ratio*, que significa "divisão". Podemos expressar a razão na forma de fração, de porcentagem ou de número decimal.

Veja outros exemplos:

- Observe a orientação de uso no rótulo desta garrafa de suco concentrado.

GEORGE TUTUMI

De acordo com essa orientação, podemos dizer que para cada litro de suco concentrado devem ser colocados 5 ℓ de água na mistura.

- A razão entre a quantidade de suco concentrado e a quantidade de água é: $\frac{1}{5} = 0{,}20 = \frac{20}{100} = 20\%$
- A razão entre a quantidade de água e a quantidade de suco concentrado é: $\frac{5}{1} = \frac{500}{100} = 500\%$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- Jenifer prestou um concurso.

  Dos 1 200 candidatos inscritos nesse concurso, 300 foram aprovados.

  A razão entre o número de candidatos aprovados e o número de inscritos nesse concurso é:

JOSÉ LUÍS JUHAS

$$\frac{300}{1200} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

(:300 sobre $\frac{300}{1200}$; :300 sob $\frac{1}{4}$)

  A razão indica que, em cada grupo de quatro candidatos inscritos, um foi aprovado.

- Na cerimônia do Dia Internacional da Mulher, em 8 de março, das 100 pessoas convidadas, 75 eram mulheres.

  A razão entre o número de mulheres e o número de convidados é:

$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100} = 75\%$$

(:25 sobre $\frac{75}{100}$; :25 sob $\frac{3}{4}$)

  A razão indica que, em cada grupo de quatro convidados, três eram mulheres.

  Essa razão também pode ser expressa em porcentagem. Se havia 75 mulheres entre 100 convidados, 75% dos convidados eram mulheres.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva, no caderno, uma razão para representar cada uma das frases.

a) Um corretor de imóveis recebe R$ 5,00 de comissão para cada R$ 100,00 em imóveis vendidos. $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$ ou 5%.

b) Um time de futebol feminino venceu 15 dos 22 jogos que disputou. $\frac{15}{22}$

c) Melissa acertou 17 das 20 questões de uma prova de Matemática. $\frac{17}{20}$

d) No Brasil, o combustível usado nos carros movidos a gasolina tem sido, na verdade, um composto em que para 4 litros de composto há 1 litro de álcool anidro. $\frac{1}{4}$

2 Carlos e Antônio brincaram de cobrar pênaltis. Carlos cobrou 8 pênaltis e fez 5 gols. Antônio cobrou 10 pênaltis e fez 7 gols.

a) Escreva, na forma de fração irredutível, a razão entre o número de pênaltis cobrados por Carlos e o número de pênaltis cobrados por Antônio. $\frac{4}{5}$

b) Escreva, na forma de porcentagem, a razão entre o número de gols feitos e o número de pênaltis cobrados por Antônio. 70%

c) Escreva, na forma decimal, a razão entre o número de gols feitos e o número de pênaltis cobrados por Carlos. 0,625

Lembre-se:
Não escreva no livro!

3 Em uma indústria automobilística, para cada grupo de 10 000 veículos produzidos, 1250 são brancos. Qual é a razão entre o número de veículos brancos e o número de veículos produzidos? $\frac{1250}{10000} = \frac{1}{8}$

4 Em uma classe de 30 alunos, 24 foram aprovados.

JOSÉ LUÍS JUHAS

Determine a razão entre o número de alunos:

a) aprovados e o total de alunos; $\frac{4}{5}$

b) reprovados e o total de alunos; $\frac{1}{5}$

c) aprovados e o número de alunos reprovados. $\frac{4}{1}$

5 Para fazer uma salada de frutas foram utilizados 4 abacaxis, 20 bananas, 8 laranjas, 6 maçãs e 2 mamões.

JOSÉ LUÍS JUHAS

Determine a razão entre o número:

a) de abacaxis e o de laranjas; $\frac{1}{2}$

b) de maçãs e o de mamões; 3

c) de laranjas e o de bananas; $\frac{2}{5}$

d) de abacaxis e o total de frutas; $\frac{1}{10}$

e) de bananas e o total de frutas; $\frac{1}{2}$

f) total de frutas e o de mamões. 20

6 Em uma prova com 80 testes, a razão entre o número de testes que Daniele acertou e o número total de testes foi de 2 para 5.

a) Represente essa razão em forma de fração irredutível, de número decimal e de porcentagem. $\frac{2}{5}$; 0,4; 40%

b) Calcule o número de testes que Daniele acertou. 32 testes

JOSÉ LUÍS JUHAS

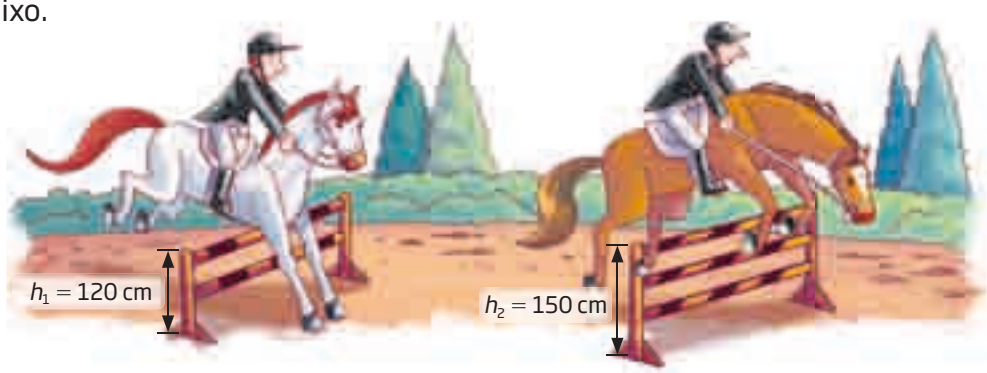
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Razão entre grandezas de mesma natureza

Algumas razões são utilizadas para comparar grandezas de mesma natureza que devem estar expressas em uma mesma unidade.

Exemplos

- Vamos determinar a razão entre as medidas das alturas h_1 e h_2 dos obstáculos de hipismo abaixo.



JOSÉ LUÍS JUHAS

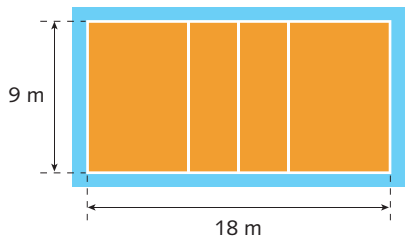
A razão entre as medidas das alturas h_1 e h_2 é dada por:

$$\frac{120}{150} = \frac{120}{150} \overset{:30}{=} \frac{4}{5} = 0{,}80 = \frac{80}{100} = 80\%$$

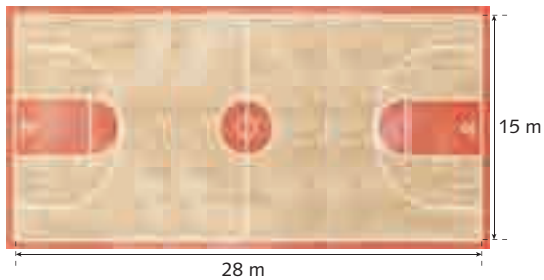
Pergunte aos alunos o que o resultado 80% representa. Diga a eles que h_1 corresponde a 80% de h_2. Pergunte também o que aconteceria se invertêssemos a ordem da razão. Verifique se eles compreendem que obteríamos a razão $\frac{5}{4} = 1{,}25 = \frac{125}{100} = 125\%$, o que representa que h_2 corresponde a 125% de h_1, ou seja, que h_2 é 25% maior que h_1.

Assim, a razão entre as medidas das alturas h_1 e h_2 é $\frac{4}{5}$.

- Vamos determinar a razão entre as áreas das quadras de vôlei e de basquete.



área da quadra de vôlei:
$(9 \cdot 18)\ m^2 = 162\ m^2$



área da quadra de basquete:
$(15 \cdot 28)\ m^2 = 420\ m^2$

GUILHERME CASAGRANDI

Razão entre as áreas das quadras de vôlei e de basquete: $\frac{162}{420} \overset{:6}{=} \frac{162}{420} = \frac{27}{70}$

Assim, a razão entre as áreas das quadras de vôlei e de basquete é $\frac{27}{70} \simeq 38{,}5\%$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Escala

As plantas baixas, as maquetes, as miniaturas e os mapas representam construções, objetos e territórios. Essas representações apresentam uma razão chamada **escala**.

> Escala é a razão entre a medida do comprimento que está na representação gráfica e a medida correspondente do comprimento real, expressos em uma mesma unidade de medida.

SÉRGIO DOTTA

Maquete de edifício cuja escala é 1 : 43, em São Paulo, 2015.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

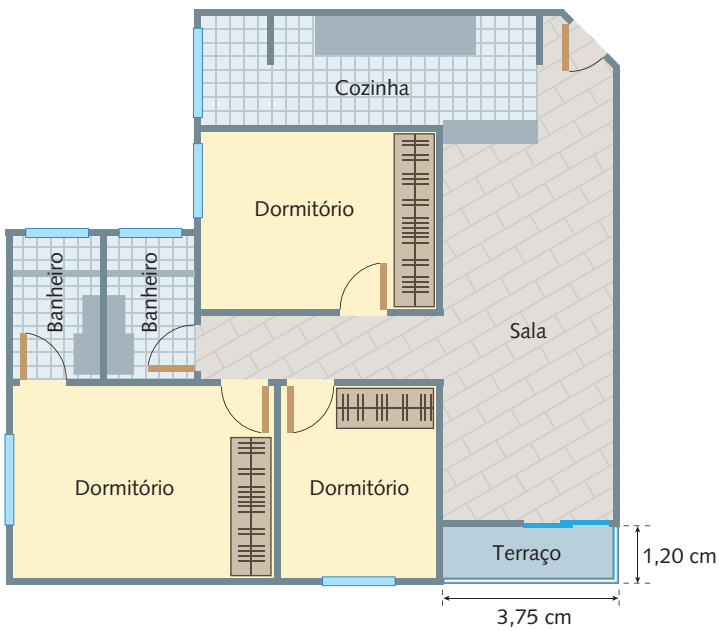
Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2013. p. 119.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

- Observando a escala da planta baixa do apartamento de Mônica, podemos obter as medidas reais.

LUIZ RUBIO



Ela foi representada na escala $1:100$ ou $\frac{1}{100}$ (lemos: "1 para 100").

Isso significa que 1 centímetro do desenho corresponde a 100 centímetros (1 metro) do comprimento real.

As medidas do terraço na planta baixa são 3,75 cm e 1,20 cm. Para determinar as medidas reais do terraço, podemos fazer:

$3{,}75 \cdot 100 = 375$

$1{,}20 \cdot 100 = 120$

Portanto, as medidas reais desse terraço são 375 cm e 120 cm, ou seja, 3,75 m e 1,20 m.

- Vamos considerar a situação descrita na questão abaixo e obter a escala pedida.

As medidas do comprimento e da largura de um pôster são 1,60 m e 1,20 m, respectivamente. Ele foi reproduzido de uma foto com 8 cm de comprimento e 6 cm de largura. Qual é a escala utilizada na confecção desse pôster?

INGRID PRATS/SHUTTERSTOCK

Como as medidas das dimensões (comprimento e largura) da foto e do pôster devem ser expressas na mesma unidade, fazemos:

- comprimento do pôster: 1,60 m = 160 cm
- largura do pôster: 1,20 m = 120 cm

Assim, obtemos a escala escrevendo a razão, que deve ser a mesma para ambas as dimensões:

- comprimento: $\frac{8}{160} = \frac{8}{160} = \frac{1}{20}$, ou seja, 1 : 20
- largura: $\frac{6}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$, ou seja, 1 : 20

Logo, a escala utilizada para a confecção do pôster é 1 : 20.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva na forma irredutível a razão entre cada par de medidas, na ordem apresentada.

a) 5 cm e 10 cm $\frac{1}{2}$

b) 200 g e 40 g $\frac{5}{1}$

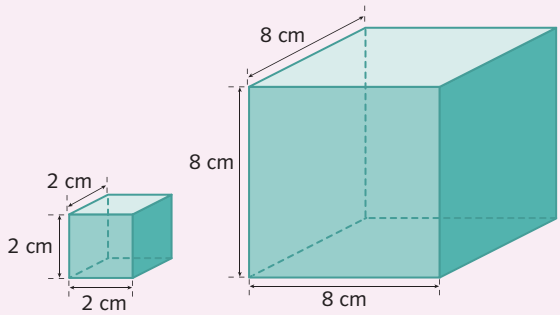
c) 7 kg e 10,5 kg $\frac{2}{3}$

d) 14 ℓ e 35 ℓ $\frac{2}{5}$

2 Ivan e Sílvio caminham no parque todos os dias. Ontem Ivan caminhou 2 000 metros, e Sílvio, 3 500 metros. Determine a razão entre as distâncias percorridas por Ivan e Sílvio. $\frac{4}{7}$

3 Um terreno tem 750 m^2 de área total e 500 m^2 de área construída. Qual é a razão entre a área construída e a área livre? 2

4 Qual é a razão entre as medidas das arestas e dos volumes de dois cubos, A e B, cujas arestas medem 2 cm e 8 cm, respectivamente? $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{64}$



LUIZ RUBIO

5 Dois quadrados, A e B, têm, respectivamente, 4 cm e 10 cm de medida de lado. Determine a razão entre:

a) as medidas dos lados dos quadrados A e B; $\frac{2}{5}$

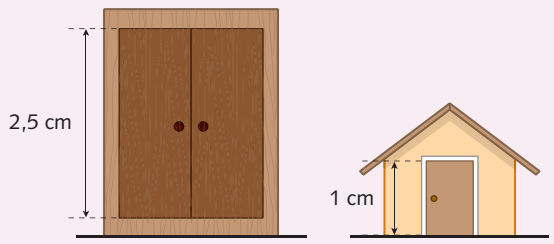
b) as áreas dos quadrados A e B; $\frac{4}{25}$

c) os perímetros dos quadrados A e B; $\frac{2}{5}$

d) a medida do lado do quadrado A e o perímetro do quadrado B. $\frac{1}{10}$

6 Determine a escala da planta de um terreno na qual o comprimento de medida 100 m foi representado por um segmento de medida 5 cm. $\frac{1}{2000}$

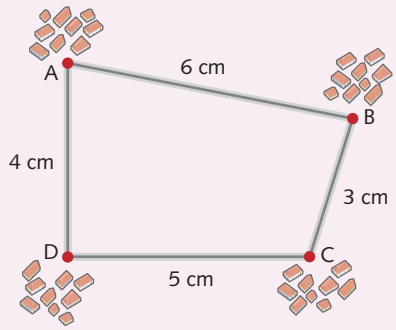
7 A frente de um armário foi desenhada na escala 1 : 60, e a fachada de uma casa foi feita na escala 1 : 200. Observe as figuras e determine qual das duas portas (a do armário ou a da casa), no tamanho real, tem maior altura. casa



GUILHERME CASAGRANDI

8 Em um mapa de escala 1 : 200, a distância entre dois pontos é 8,5 cm. Qual é a distância real, em metro, entre esses dois pontos? 17 m

9 Observe a figura abaixo, feita na escala 1 : 2 500 000, e determine, em quilômetro, a distância real entre as cidades A e B, B e C, C e D. 150 km; 75 km; 125 km



GUILHERME CASAGRANDI

10 A figura mostra a planta de um apartamento na escala 1 : 200.

GUILHERME CASAGRANDI

Determine:

a) as dimensões reais do apartamento (medida do comprimento total e medida da largura total), em metro; 12 m e 10,2 m

b) a área real, em metro quadrado, do apartamento; 122,4 m^2

c) a área real do quarto 2, em metro quadrado; 16,8 m^2

d) a área real da varanda, em metro quadrado. 6,4 m^2

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Razão entre grandezas de naturezas diferentes

No dia a dia, utilizamos algumas razões que recebem nomes especiais. Observe alguns exemplos a seguir.

Consumo médio

Beatriz foi de São Paulo a Campinas (92 km) em seu carro. O carro de Beatriz consumiu nesse percurso oito litros de combustível. A razão entre a distância de São Paulo a Campinas e o combustível consumido é dada por:

$$\frac{92\text{ km}}{8\ \ell} = 11{,}5\text{ km}/\ell$$

Lemos: "onze vírgula cinco quilômetros por litro".

Essa razão representa o consumo médio do carro de Beatriz e indica que a cada litro consumido o carro percorreu, em média, 11,5 km.

SÃO PAULO: PRINCIPAIS CIDADES

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2013. p. 159.

Velocidade média

Moacir fez, de carro, o percurso entre as cidades do Rio de Janeiro e São Paulo (450 km, aproximadamente) em cinco horas. A velocidade média do carro de Moacir durante esse percurso é dada por:

$$\frac{450\text{ km}}{5\text{ h}} = 90\text{ km/h}$$

Lemos: "noventa quilômetros por hora".

Essa razão indica que, a cada hora, o carro percorreu, em média, 90 km.

Densidade demográfica

A população do estado do Ceará, segundo levantamento demográfico feito pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 2014, era estimada em 8 842 791 habitantes. A área do estado é de 148 886 km^2. A densidade demográfica do estado do Ceará era dada por:

$$\frac{8\,842\,791\text{ hab.}}{148\,886\text{ km}^2} \simeq 59\text{ hab./km}^2$$

Lemos: "cinquenta e nove habitantes por quilômetro quadrado".

Lemos: "aproximadamente".

Isso significa que, a cada quilômetro quadrado do estado do Ceará existiam, em 2014, aproximadamente, 59 habitantes.

MAURICIO SIMONETTI/PULSAR IMAGENS

Vista aérea da praia de Iracema, Fortaleza (CE), 2013.

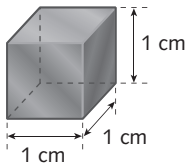
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Densidade de um corpo

Lembre aos alunos que o volume é a medida do espaço que um corpo ocupa.

Um cubo de ferro de 1 cm de aresta tem massa igual a 7,8 g. A razão entre a medida da massa e o seu volume é dada por:

$$\frac{7{,}8\ \text{g}}{1\ \text{cm}^3} = 7{,}8\ \text{g/cm}^3$$ → Lemos: "sete vírgula oito gramas por centímetro cúbico".



GUILHERME CASAGRANDI

Volume: $(1 \cdot 1 \cdot 1)\ \text{cm}^3 = 1\ \text{cm}^3$

Essa razão, que representa a densidade do ferro, significa que 1 cm^3 de ferro tem 7,8 g de massa.

A razão entre a medida da massa de um corpo e o seu volume é denominada **densidade**.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva na forma irredutível a razão entre as medidas apresentadas em cada item, na ordem dada.

a) 10 km e 5 ℓ 2 km/ℓ

b) 50 m e 25 s 2 m/s

c) 20 000 habitantes e 4 000 km^2 5 hab./km^2

d) 20 médicos e 2 000 habitantes 0,01 médico/hab.

e) 72 alunos e 36 m^2 2 alunos/m^2

2 Um quadriciclo fez um percurso de 168 km em três horas. Qual foi sua velocidade média? 56 km/h

3 Um corpo de 200 g tem 1 000 cm^3 de volume. Qual é a densidade desse corpo? 0,2 g/cm^3

4 Mauro foi, de carro, de São Paulo ao Rio de Janeiro em cinco horas. Maurício, seu irmão, foi, também de carro, de São Paulo a Brasília em 12 horas. Qual dos carros desenvolveu a maior velocidade média: o de Mauro ou o de Maurício? Mauro; 90 km/h

GUILHERME CASAGRANDI

5 Uma cidade tem 180 000 habitantes e área de 1 200 km^2. Qual é sua densidade demográfica? 150 hab./km^2

6 O Sky Cycle é o projeto de um conjunto de ciclovias suspensas que se espalhará pelos céus de Londres, na Inglaterra. Nessas ciclovias, um ciclista poderá percorrer 8 km em apenas 24 minutos sem muita dificuldade. Nessa situação, qual é a velocidade média do ciclista? 20 km/h

ARQUITETURA EXTERIOR LTD.

Representação do projeto de ciclovia suspensa em Londres, na Inglaterra.

7 Com 30 ℓ de combustível, um veículo percorre 255 km de um rali. Qual é o consumo médio desse carro no rali? 8,5 km/ℓ

8 Pesquise a população atual e a área do município em que você nasceu. Depois, calcule a densidade demográfica desse município. Resposta pessoal. A resposta depende do município em que o aluno nasceu.

9 Converse com um colega sobre a questão proposta pelo palhaço Docito. Depois, respondam à questão.

Espera-se que os alunos percebam que a massa dos dois materiais é a mesma: 1 quilograma, apesar de o volume deles ser diferente.

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Quais são as formas de representar uma razão entre os números a e b?

Podemos representar na forma de fração, de porcentagem ou na forma decimal.

2 Algumas razões recebem nomes especiais. Escolha no quadro abaixo a palavra que completa corretamente a afirmação de cada item a seguir. Depois, reescreva as afirmações no caderno.

Escala	Consumo médio	Velocidade média	Densidade demográfica	Densidade de um corpo

a) ■ é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto. velocidade média

b) ■ é a razão entre a massa de um corpo e o seu volume. densidade de um corpo

c) ■ é a razão entre a medida do comprimento, que está na representação gráfica, e a medida correspondente do comprimento real, expressos em uma mesma unidade de medida. escala

d) ■ é a razão entre a quantidade de habitantes e a área de uma região. densidade demográfica

e) ■ é a razão entre a distância percorrida e a quantidade de combustível consumido. consumo médio

3 O que significa dizer que a escala de uma mapa é 1 : 1000?

Significa que cada 1 cm do papel corresponde a 1 000 cm reais.

4 Ana, Beatriz e Celinha reproduziram um mesmo desenho de flor aplicando, respectivamente, as escalas 1 : 100; 1 : 10 e 1 : 1. Qual delas fez o menor desenho? O que se pode dizer a respeito do desenho original e do desenho de Celinha?

Ana fez o menor desenho. O desenho de Celinha e o desenho original têm o mesmo tamanho.

Aplicando

1 Determine a forma irredutível da razão entre cada par de medidas apresentada, na ordem dada:

a) 64 000 kg e 2 t 32

b) 5 ℓ e 25 ℓ $\frac{1}{5}$

c) 4 cm e 1 m $\frac{1}{25}$

d) 2 m^3 e 8 m^3 $\frac{1}{4}$

2 Observe a tabela abaixo.

Times	Pontos ganhos
Flamengo	16
Botafogo	14
Vasco	12
Fluminense	8

Determine a razão entre:

a) o número de pontos ganhos pelo Fluminense e pelo Flamengo; $\frac{1}{2}$

b) o número de pontos ganhos pelo Botafogo e pelo Vasco; $\frac{7}{6}$

c) o número de pontos ganhos pelo Flamengo e pelo terceiro colocado. $\frac{4}{3}$

3 Em um jogo de basquete, Marcelo acertou 20 dos 28 arremessos que fez. Qual foi a razão entre o número de arremessos e o número de cestas? $\frac{7}{5}$

4 A população de certo estado é de, aproximadamente, 19 800 000 habitantes, sendo 10 000 000 mulheres. Qual é a razão, aproximada, entre o número de mulheres e o número de habitantes desse estado? $\frac{1}{2}$

5 Um quarto foi representado por um quadrado de 1,5 cm de medida de lado em uma planta baixa, com escala 1 : 200. Qual é a área real do quarto, em metro quadrado? 9 m^2

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6 **(Enem)**

> No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".
>
> Disponível em: <http://www.estadao.com.br>. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm.

Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado? alternativa **e**

a) 1 : 20 c) 1 : 200 e) 1 : 2 000
b) 1 : 100 d) 1 : 1 000

7 A maquete de um prédio foi feita na escala 1 : 200, e sua altura mede 40 cm. Qual é a medida real da altura do prédio? 80 m

8 Observe a foto de uma miniatura do dirigível Hindenburg cuja escala é 1 : 720. Determine a medida real do comprimento desse dirigível, sabendo que a miniatura tem 35,2 cm de comprimento. 253,44 m

JUNIOR ROZZO

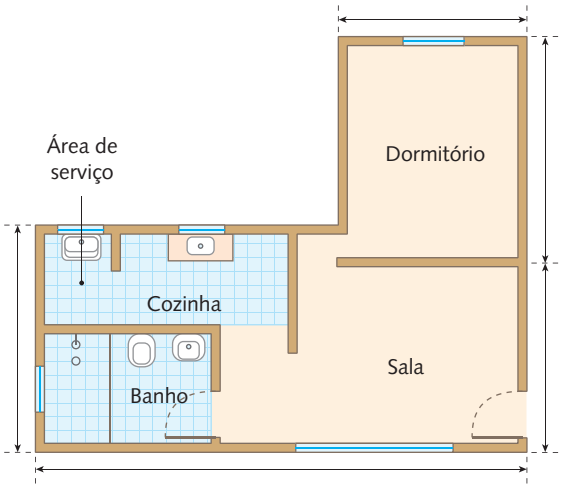
Miniatura do mais famoso dos dirigíveis Zeppelins, que saiu de Hamburgo (Alemanha) e cruzou o oceano Atlântico a 110 km/h, em 1937.

9 Rosa possui duas plantas baixas de sua casa: uma na escala 1 : 500, outra na escala 1 : 300. Em qual dessas escalas a representação gráfica é maior? 1 : 300

10 **(Enem)** Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250. Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete? alternativa **c**

a) 4,8 e 11,2 d) 28,0 e 12,0
b) 7,0 e 3,0 e) 30,0 e 70,0
c) 11,2 e 4,8

11 Observe a planta baixa de um apartamento na escala 1 : 140.



GUILHERME CASAGRANDI

Com uma régua, meça os comprimentos indicados pelas setas e determine:

a) as dimensões reais do dormitório, em metro; 4,2 m, 3,5 m
b) a área real do dormitório, em metro quadrado; 14,7 m²
c) a área total do apartamento, em metro quadrado. 50,47 m²

12 Segundo dados do IBGE, Minas Gerais tem área de 586 520 km² e a população, em 2014, era de 20 734 097 habitantes. Qual era, aproximadamente, a sua densidade demográfica em 2014? 35 hab./km²

13 **(OBM)** Paulinho e sua irmã saem ao mesmo tempo de casa para a escola. Paulinho vai de bicicleta, a uma velocidade média de 18 quilômetros por hora, e sua irmã vai com uma moto. Ela chega 20 minutos antes de Paulinho. Neste momento, quantos quilômetros ainda faltam para Paulinho chegar? alternativa **a**

a) 6 b) 8 c) 9 d) 15 e) 18

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

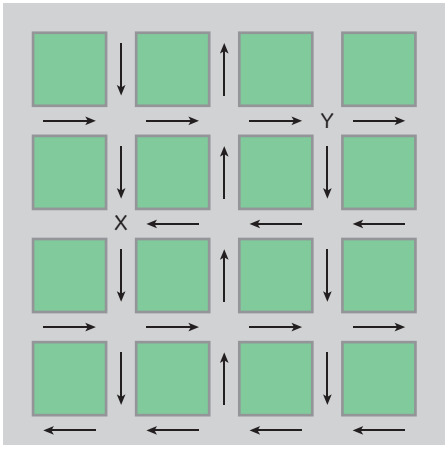
14 Em uma viagem entre as cidades de Brasília e Havana, em Cuba, distantes aproximadamente 6 000 km uma da outra, um avião gastou oito horas. Qual foi sua velocidade média? 750 km/h

15 A razão entre o número de médicos e o número de habitantes de uma cidade é $\frac{1}{3\,000}$. Determine a população dessa cidade, sabendo que nela há 42 médicos. 126 000 habitantes

16 Uma pedra preciosa tem 28,8 g de massa e ocupa 8 cm^3 de volume. Qual é a densidade dessa pedra preciosa? 3,6 g/cm^3

17 Um reservatório contém 12 000 litros de água. Um produto químico deve ser misturado à água na razão de uma medida de 40 gramas para cada 320 litros de água. Quantos pacotes de 100 gramas desse produto químico deverão ser adicionados ao reservatório? 15 pacotes

18 **(Enem)** O mapa abaixo representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.



GUILHERME CASAGRANDI

Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X, demoraria para chegar até o ponto Y? alternativa **d**

a) 25 min
b) 15 min
c) 2,5 min
d) 1,5 min
e) 0,15 min

19 O Circuito das Américas, de Fórmula 1, nos Estados Unidos, tem extensão de 5 513 m e as corridas realizadas nele são disputadas em 56 voltas. O vencedor da disputa, em determinado ano, concluiu a prova em 1 hora e 20 minutos. Qual foi sua velocidade média, em quilômetro por hora?
aproximadamente 231,6 km/h

JOSÉ LUÍS JUHAS

20 Um trem faz o percurso entre Paris, na França, e Berna, na Suíça, em 3 horas e 20 minutos. Determine a distância, em quilômetro, entre essas cidades, sabendo que a velocidade média do trem é 252 km/h.
840 km

EUROPA: FRANÇA E SUÍÇA

Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2013. p. 89.

21 **(Enem)** Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de: alternativa **e**

a) 1 : 250
b) 1 : 2 500
c) 1 : 25 000
d) 1 : 250 000
e) 1 : 25 000 000

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

22 **(Enem)**

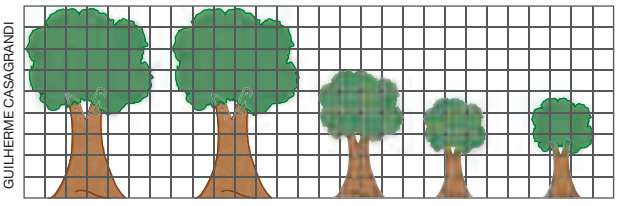
> **Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani**
>
> O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1 200 000 quilômetros quadrados, dos quais 840 000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.
>
> Na maioria das vezes em que são feitas referências à água são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.
>
> Disponível em: <http://noticias.terra.com.br>. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da Sabesp, a capacidade do aquífero Guarani é:

a) $1{,}5 \times 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.
b) $1{,}5 \times 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.
c) $1{,}5 \times 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.
d) $1{,}5 \times 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.
e) $1{,}5 \times 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

alternativa **e**

23 **(Enem)** Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.

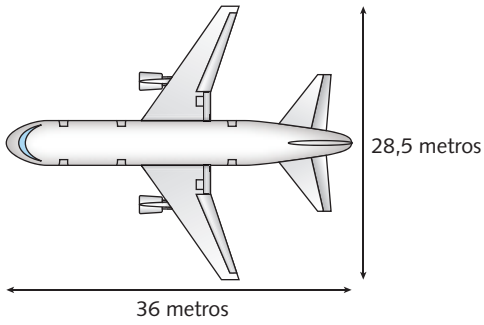


GUILHERME CASAGRANDI

Qual é a árvore que apresenta a maior altura real? alternativa **d**

a) I b) II c) III d) IV e) V

24 **(Enem)** A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1 : 150.



Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter? alternativa **d**

a) 2,9 cm × 3,4 cm d) 21 cm × 26 cm
b) 3,9 cm × 4,4 cm e) 192 cm × 242 cm
c) 20 cm × 25 cm

25 **(Enem)** O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

Biomas continentais brasileiros	Área aproximada (km^2)	Área/total Brasil
Amazônia	4 196 943	49,29%
Cerrado	2 036 448	23,92%
Mata Atlântica	1 110 182	13,04%
Caatinga	844 453	9,92%
Pampa	176 496	2,07%
Pantanal	150 355	1,76%
Área total Brasil	8 514 877	

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com as medidas de 120 m × 90 m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal? alternativa **e**

a) 1400 c) 140 000 e) 14 000 000
b) 14 000 d) 1 400 000

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

8 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

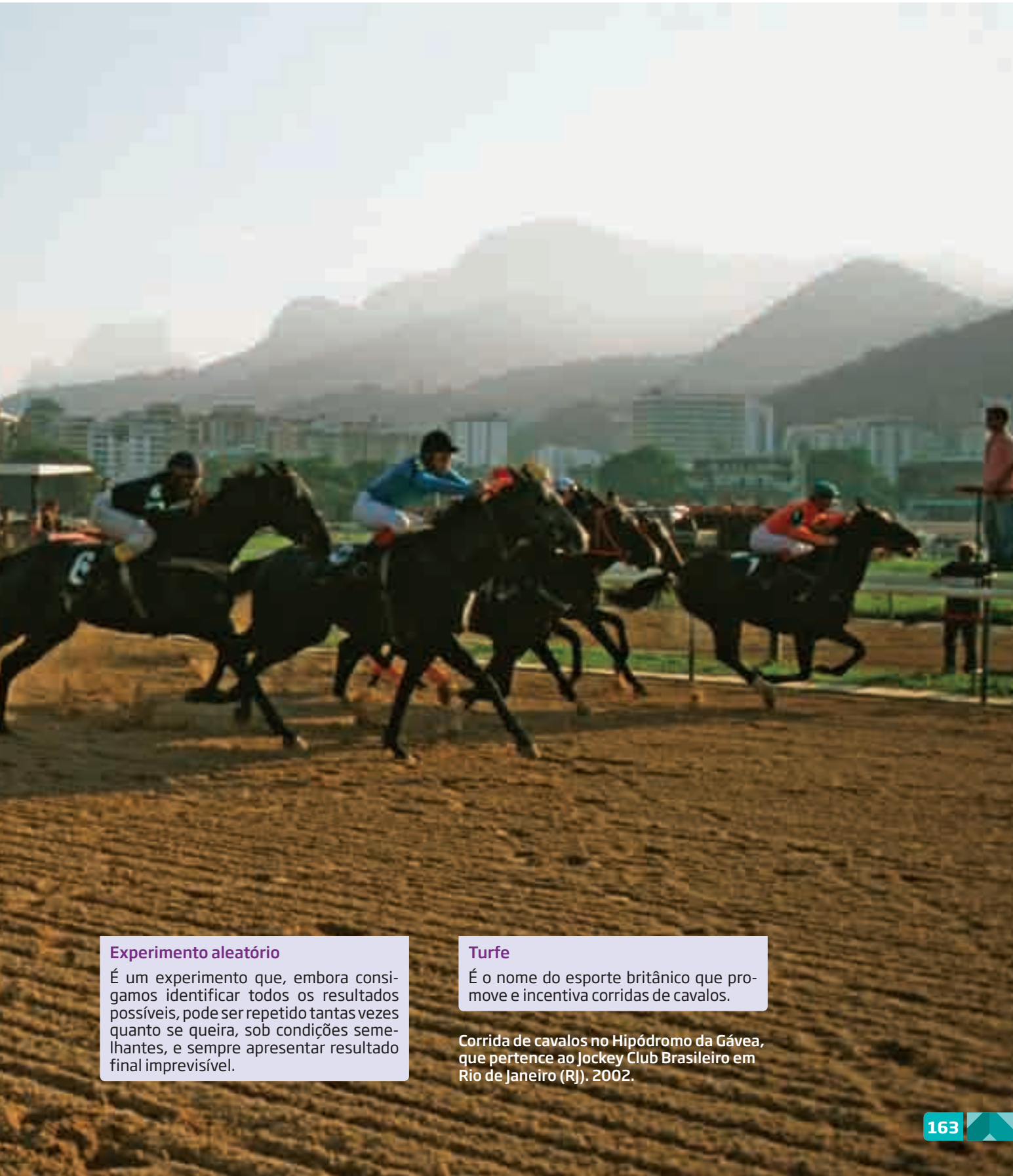
BRUNO VEIGA/TYBA

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O Grande Prêmio Brasil é a principal prova de **turfe** no país, disputado no Hipódromo da Gávea (RJ), para cavalos da raça puro-sangue inglês. Nesta fotografia, vemos a largada de uma corrida com vários jóqueis.

- Quais desses jóqueis podem vencer a prova? Qualquer um desses jóqueis.
- Podemos dizer que essa disputa é um **experimento aleatório**? Por quê? Não. Apesar de conhecermos os possíveis resultados dessa disputa, não podemos assegurar que uma nova prova se dará nas mesmas condições.

Neste capítulo, vamos trabalhar com Probabilidade e Estatística, abordando: o conceito e a forma de efetuar alguns cálculos de probabilidades, a Estatística, as representações gráficas e as medidas de tendência central. Utilizando a imagem de abertura, introduza o conceito de probabilidade e discuta com a turma o conceito de "experimento aleatório".



Experimento aleatório

É um experimento que, embora consigamos identificar todos os resultados possíveis, pode ser repetido tantas vezes quanto se queira, sob condições semelhantes, e sempre apresentar resultado final imprevisível.

Turfe

É o nome do esporte britânico que promove e incentiva corridas de cavalos.

Corrida de cavalos no Hipódromo da Gávea, que pertence ao Jockey Club Brasileiro em Rio de Janeiro (RJ). 2002.

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Observe as situações a seguir e responda às questões:

- Será menino ou menina?
- Será que vai fazer sol amanhã?

- A chance de a bolinha cair no recipiente A é maior? sim

Diariamente, tentamos prever acontecimentos que podem interferir de alguma forma em nossa vida. Em alguns casos, essas previsões são meramente intuitivas, mas, em outros casos, podemos calcular matematicamente as chances de um evento ou fenômeno ocorrer. Esse estudo é chamado **Probabilidade**.

A **Estatística**, por sua vez, é a parte da Matemática que coleta, organiza e analisa um conjunto de dados.

Neste capítulo, vamos ampliar nossos conhecimentos sobre **Probabilidade** e **Estatística**.

ILUSTRAÇÕES: EDUARDO FRANCISCO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 O que é probabilidade?

Veja os experimentos:

- Um objeto lançado para cima atinge uma altura máxima e, depois, inicia um movimento de queda.
- Um bloco impulsionado sobre uma superfície plana se desloca e, depois, para.

GEORGE TUTUMI

Nos experimentos acima, o início do movimento de queda e o término do movimento do bloco já eram previstos.

Observe, agora, estes experimentos:

- Ao lançarmos um dado, que número sairá?
- Ao lançarmos uma moeda, obteremos cara ou coroa?

Nos experimentos acima, não conseguimos afirmar que número será obtido no lançamento do dado ou que face da moeda obteremos.

No lançamento de um dado, podemos obter 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 na face voltada para cima. Ao lançar uma moeda, podemos obter cara ou coroa. Nos dois experimentos acima, não podemos assegurar qual resultado será obtido no final, apenas as possibilidades de resultados.

Um **experimento aleatório** é aquele em que conhecemos os resultados possíveis, mas não podemos assegurar qual será o resultado final. Além disso, o experimento pode ser repetido nas mesmas condições tantas vezes quanto quisermos.

Por não podermos prever o resultado de um experimento aleatório, procuramos medir as chances, ou seja, determinar as **probabilidades** de certo resultado ocorrer.

No lançamento de uma moeda, há duas possibilidades de resultado: cara ou coroa.

Como a moeda é simétrica em relação ao seu centro, supomos que a probabilidade de sair uma ou outra face sejam iguais.

Dessa forma, a probabilidade de sair "cara" é $\frac{1}{2}$ ou 50% e a de sair "coroa" é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

ACERVO DO BANCO CENTRAL DO BRASIL

No lançamento de um dado, há seis possibilidades de resultado: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Como o dado é simétrico em relação ao seu centro, supomos que a probabilidade de sair uma das faces seja igual à de sair qualquer outra.

Dessa forma, a probabilidade de obter um dos resultados é $\frac{1}{6}$ ou 16,666... %.

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Indique no caderno quais dos experimentos a seguir são aleatórios. alternativas **a** e **c**

a) Lançar um dado e verificar se o número obtido é ímpar.

b) Lançar uma bola ao cesto e acertar esse lançamento.

c) Lançar uma moeda e verificar que o resultado obtido é coroa.

d) Observar o Sol durante 24 horas para verificar se ele se põe ou não.

2 Cite dois experimentos aleatórios e três não aleatórios. Resposta pessoal.

3 Observe as bandejas A, B e C. De olhos vendados, Luís vai sortear uma bola de uma delas: fecha os olhos e escolhe uma, ao acaso. De qual dessas bandejas é mais provável que Luís tire uma bola vermelha? De qual é menos provável?

mais provável: C; menos provável: B

GEORGE TUTUMI

4 Se retirarmos uma bola da bandeja ao lado, poderemos afirmar seguramente que ela será verde? Por quê?

Sim, porque todas as bolas da bandeja são verdes.

GEORGE TUTUMI

5 Identifique no caderno cada item a seguir como certo, provável ou impossível.

a) Ao lançar um dado numerado de 1 a 6, podemos obter o número 7. impossível

b) Não haverá empate na partida de futebol. provável

c) Ao lançar dois dados, vamos obter dois números diferentes. provável

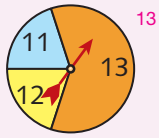
6 Observe as roletas e indique no caderno qual valor é mais provável de obter ao girar a flecha.

a)

c)

b)

d)



Nenhum, pois as probabilidades são iguais.

GUILHERME CASAGRANDI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Cálculo de probabilidades

Um aparelho de som será sorteado entre os 1 000 alunos de uma escola.

Há 50 alunos nos terceiros anos e 80 alunos nos sextos anos.

Podemos **calcular a probabilidade** de o ganhador ser do 3º ano e a probabilidade de o ganhador ser do 6º ano.

A probabilidade de que o aluno sorteado seja do 3º ano é $\frac{50}{1000}$, e a probabilidade de que o aluno sorteado seja do 6º ano é $\frac{80}{1000}$.

Aparelho de som a ser sorteado na escola.

ANTONMALTSEV/SHUTTERSTOCK

A **probabilidade** de determinado resultado em um experimento aleatório é a razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades.

Observe outro exemplo.

Ao lançar um dado uma única vez:

YURCHELLO108/ SHUTTERSTOCK

- Qual é a probabilidade de obtermos 6?

  No lançamento de um dado, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

  Como a probabilidade é a mesma de sair qualquer um dos seis resultados possíveis, dizemos que a probabilidade de sair a face 6 é de 1 em 6.

  Ela pode ser expressa pela razão: $\frac{1}{6}$.

- Qual é a probabilidade de obtermos um número par?

  Nesse caso, há três resultados favoráveis (2, 4 ou 6) entre os seis resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

  Portanto, a probabilidade é $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$. Também pode ser expressa por um número decimal (0,5) ou por porcentagem (50%).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Em um único lançamento de dado, qual é a probabilidade:

a) de sair um número ímpar? $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) de sair um número maior que 4? $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) de sair o número 8? 0

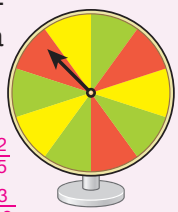
BILDERBOX/AGB PHOTO

2 Ao girarmos uma única vez uma roleta como a representada ao lado, qual é a probabilidade de a flecha:

a) parar na cor amarela? $\frac{3}{10}$

b) parar na cor verde? $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

c) parar na cor vermelha? $\frac{3}{10}$



GUILHERME CASAGRANDI

3 Em um único lançamento de duas moedas ao mesmo tempo, quais são os resultados possíveis? Qual é a probabilidade de, sem diferenciar a ordem dos elementos, obter apenas uma "cara"?

cara e cara; cara e coroa; coroa e coroa; $\frac{1}{3}$

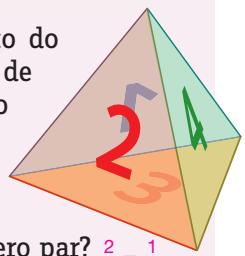
4 Qual é a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, uma única carta de um baralho de 52 cartas, sair um "dois"? (Lembre-se de que em um baralho há 4 "dois" – um de cada naipe: espadas, copas, paus e ouros.) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

PAULO MANZI

5 Qual é a probabilidade de uma bola vermelha ser retirada dessa bandeja? $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

GEORGE TUTUMI

6 Em um único lançamento do dado tetraédrico (dado de quatro faces, cujo formato lembra uma pirâmide) ao lado, qual é a probabilidade:



GUILHERME CASAGRANDI

a) de obtermos um número par? $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) de obtermos um número menor que 4? $\frac{3}{4}$

7 Uma escola tem 1000 alunos. O 1º ano tem 55 alunos, e o 2º ano, 65. Se houver um sorteio entre todos os alunos da escola, qual será a probabilidade de:

a) um aluno do 1º ano ser sorteado? $\frac{55}{1000}$

b) um aluno do 2º ano ser sorteado? $\frac{65}{1000}$

c) um aluno do 2º ano não ser sorteado? $\frac{935}{1000}$

EDUARDO FRANCISO

3 Estatística

A Estatística é o ramo da Matemática que se encarrega de coletar dados sobre determinado assunto, organizá-los e analisá-los.

Boa parte das informações divulgadas pelos meios de comunicação provém de pesquisas e estudos estatísticos.

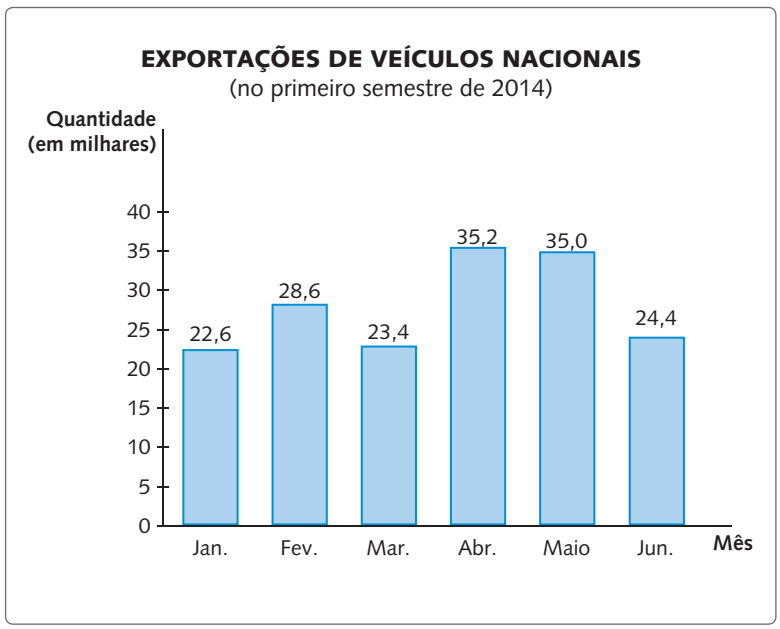
Em assuntos tão variados quanto política, turismo, informática, economia, educação, saúde, esporte e agronomia, as representações gráficas podem facilitar a compreensão de determinados aspectos ou particularidades dos objetos em estudo.

A seguir, vamos conhecer alguns tipos de gráfico.

Gráfico de barras verticais

Cada barra vertical do gráfico ao lado representa o número de veículos nacionais exportados em um mês do primeiro semestre de 2014.

O gráfico apresenta a expressão "em milhares", o que significa que o valor correspondente a cada barra deve ser multiplicado por 1 000. Podemos observar nesse gráfico que o mês de janeiro de 2014 apresentou o menor número de veículos nacionais exportados, 22 600 unidades, e que o mês de abril de 2014 apresentou o maior número de veículos nacionais exportados, 35 200 unidades.



LUIZ RUBIO

Dados obtidos em: *Folha de S.Paulo*. São Paulo, 7 out. 2014, Mercado, B3.

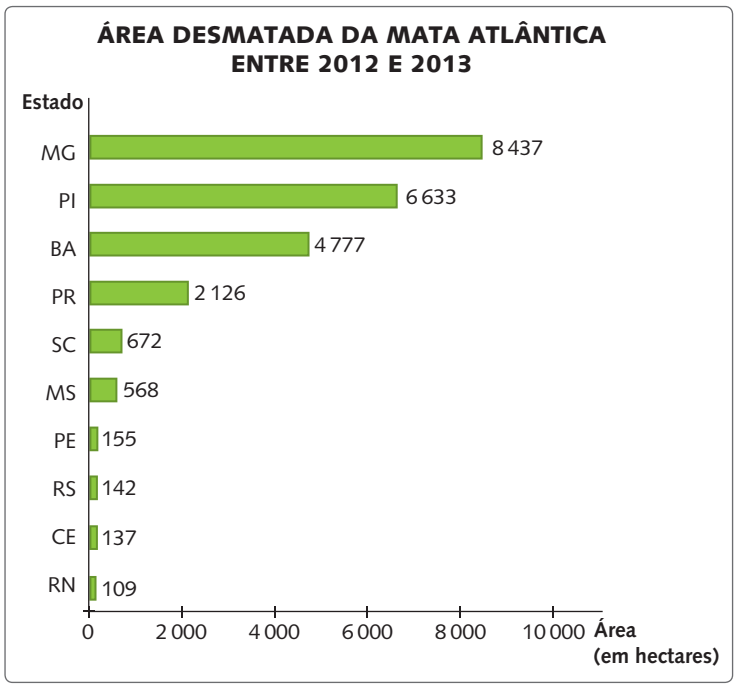
Gráfico de barras horizontais

Cada barra horizontal do gráfico da página seguinte representa a área desmatada, em milhares de hectares, em cada um dos dez estados que apresentaram maior desmatamento da Mata Atlântica entre 2012 e 2013.

Podemos observar nesse gráfico que os estados de Minas Gerais (8 437 ha), Piauí (6 633 ha), Bahia (4 777 ha) e Paraná (2 126 ha) apresentaram as maiores áreas desmatadas nesse período. Juntos, são responsáveis por aproximadamente 92% do total dos desflorestamentos, o equivalente a 21 973 ha.

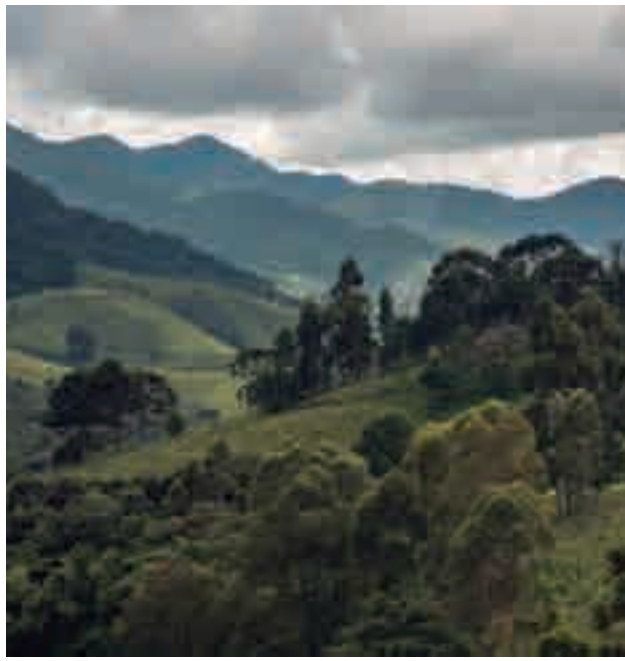
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LUIZ RUBIO



Dados obtidos em: Fundação Mata Atlântica. Disponível em: <http://www.sosma.org.br>. Acesso em: 11 mar. 2015.

ANDRÉ DIB/PULSAR IMAGENS



Fragmentos de Mata Atlântica. Serra da Mantiqueira.Sapucaí Mirim, MG. 13/02/2015.

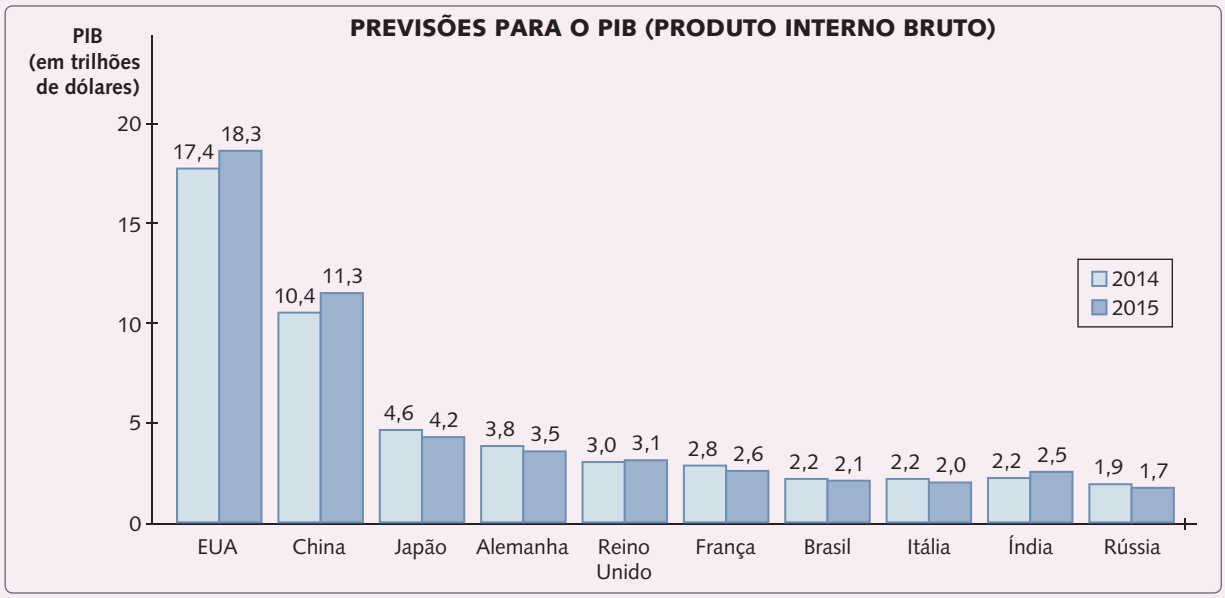
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Observe o gráfico abaixo e responda às questões.

LUIZ RUBIO



Dados obtidos em: <http://www1.folha.uol.com.br>. Érica Fraga. Brasil deve perder para a Índia o 7º lugar entre as maiores economias. Acesso em: 11 mar. 2015.

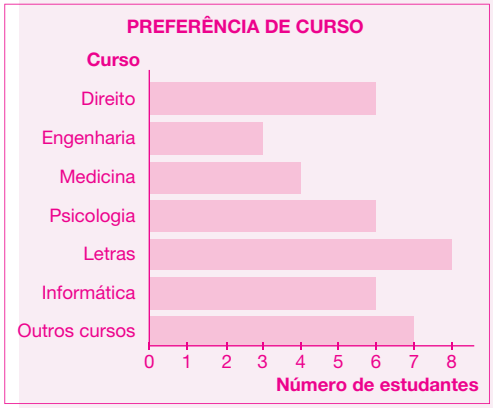
a) Segundo essa matéria, na previsão para 2015, quais países aumentariam o seu PIB? EUA, China, Reino Unido e Índia

b) Para qual posição o Brasil iria? 8ª posição

c) Caso o Brasil mantivesse o PIB de 2014, ele manteria a 7ª posição? não

Lembre-se:
Não escreva no livro!

2 Perguntou-se a 40 estudantes do Ensino Médio de uma escola qual era o curso superior de sua preferência. Observe a seguir o quadro com as respostas.



LUIZ RUBIO

Direito	6	15%
Engenharia	3	7,5%
Medicina	4	10%
Psicologia	6	15%
Letras	8	20%
Informática	6	15%
Outros cursos	7	17,5%

a) Represente, no caderno, esses resultados em um gráfico de barras (verticais ou horizontais).

b) Qual é a porcentagem que representa a preferência de cada um dos cursos?

4 Média aritmética simples, média aritmética ponderada, mediana e moda

Muitas vezes, em uma pesquisa que envolve vários dados, podemos sintetizar as informações calculando a média aritmética, a média ponderada, a mediana ou a moda desses dados.

Média aritmética simples

Observe a situação a seguir:

- Na sala de Roberta, os alunos obtiveram, na primeira prova de Matemática do ano letivo, as notas ao lado.

  Qual é a média aritmética das notas dos alunos da sala de Roberta?

  Para calcular a média aritmética (ou média aritmética simples) dessa turma, podemos adicionar as notas dos 12 alunos e dividir o resultado obtido por 12.

EDUARDO FRANCISCO

$$\frac{8{,}0 + 6{,}0 + 5{,}0 + 6{,}5 + 7{,}0 + 6{,}2 + 9{,}6 + 7{,}6 + 9{,}4 + 6{,}8 + 6{,}2 + 8{,}1}{12} = \frac{86{,}4}{12} = 7{,}2$$

12 → número de alunos

Na situação acima, o número 7,2 é a média aritmética dos números 8,0; 6,0; 5,0; 6,5; 7,0; 6,2; 9,6; 7,6; 9,4; 6,8; 6,2 e 8,1 e representa o desempenho médio da turma de Roberta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe outro exemplo:

- O Brasil mantinha uma base permanente de pesquisa na Antártida, a Estação Comandante Ferraz. Ela foi parcialmente destruída em um incêndio em 2012. Em certo dia, foram registradas, nessa estação, a temperatura máxima de −20 °C e a temperatura mínima de −35 °C. Vamos determinar a média entre essas temperaturas.

$$\frac{-20 + (-35)}{2} = \frac{-55}{2} = -27{,}5$$

A temperatura de −27,5 °C representa a média das duas temperaturas registradas na Estação Comandante Ferraz nesse dia.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

A Estação Comandante Ferraz localiza-se nas coordenadas: 62° 05′ 06″ S, 58° 24′ 12″ O.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Em uma gincana, a equipe com média aritmética de pontos maior que 60 ganha uma viagem. Veja os pontos de cada equipe:

Equipe A: 52,5; 84; 70,8; 39; 60,7

Equipe B: 42; 59,9; 58; 71,6; 70,5

Qual delas ganhou a viagem?

As duas ganharam a viagem.

2 Uma loja de carros vendeu o número de veículos indicado na tabela abaixo.

Mês	Número de veículos
Janeiro	22
Fevereiro	14
Março	30
Abril	18

Dados obtidos pela loja de carros.

Determine o número médio de automóveis vendidos:

a) nos dois primeiros meses do ano; 18

b) nos três primeiros meses do ano; 22

c) nesse quadrimestre. 21

EDUARDO FRANCISCO

3 A tabela abaixo traz dados das quatro últimas partidas de um time de futebol.

Partidas	Público
Primeira	20 358
Segunda	3 454
Terceira	68 112
Quarta	35 208

Dados obtidos pelo time de futebol.

Calcule a média de público nessas partidas.

31 783

4 A tabela abaixo indica os números referentes à exportação de suco de laranja, em tonelada, de 2012 a 2016.

Ano	Exportação de suco (em tonelada)
2012	959 000
2013	1 045 000
2014	900 000
2015	1 105 000
2016	1 080 000

Dados obtidos pela exportadora.

Determine, em tonelada, a média anual de exportação de suco nesse período.

1 017 800 toneladas

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Média aritmética ponderada

Acompanhe esta situação:

- Em uma escola, são atribuídos pesos 1, 2, 3 e 4, respectivamente, nas 1ª, 2ª, 3ª e 4ª etapas, em cada disciplina, para o cálculo da média anual do aluno. Observe o quadro abaixo com as notas de Matemática do aluno Luís Alberto nas quatro etapas:

Etapa	Nota	Pesos
1ª	7	1
2ª	8	2
3ª	6	3
4ª	9	4

Dados obtidos pela secretaria da escola.

Qual é a média anual de Luís Alberto em Matemática?

Podemos obter essa média somando as notas multiplicadas por seus pesos e dividindo o resultado pela soma dos pesos considerados:

$$\frac{7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{77}{10} = 7{,}7$$

Portanto, a média anual de Luís Alberto em Matemática é 7,7.

Outro exemplo:

- Observando a distribuição das idades dos seus alunos, a professora Rita montou a tabela abaixo.

Número de alunos	Idade
5	8 anos
8	9 anos
11	10 anos

Dados obtidos pela professora Rita.

EDUARDO FRANCISCO

Qual é a média das idades dos alunos da professora Rita?

$$\frac{8 \cdot 5 + 9 \cdot 8 + 10 \cdot 11}{5 + 8 + 11} = \frac{222}{24} = 9{,}25$$

Assim, podemos dizer que a idade média dos alunos da professora Rita é 9,25 anos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 O departamento de esportes de um colégio comprou 6 bolas de futebol, 10 bolas de basquete e 9 bolas de vôlei.

AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK

Observe os preços indicados na tabela abaixo e determine o preço médio de uma bola nessa compra. R$ 58,60

Bola	Preço unitário
Vôlei	R$ 45,00
Basquete	R$ 70,00
Futebol	R$ 60,00

Dados obtidos pelo departamento de esportes.

2 Observe o quadro abaixo e descubra a nota mínima que Diego deve tirar no quarto bimestre para atingir média final igual a 5,0.

Bimestre	Peso	Nota
Primeiro	1	6,0
Segundo	2	4,5
Terceiro	3	3,0
Quarto	4	

6,5

3 Com o auxílio de uma calculadora, calcule a média ponderada da altura de um grupo de 40 alunos indicado na tabela abaixo. 1,64 m

Altura (em metro)	Número de alunos
1,51	2
1,56	5
1,61	11
1,66	14
1,71	5
1,76	3

Mediana

Acompanhe a situação a seguir.

- O time do Atlético Mineiro conquistou a Copa do Brasil em 2014. Os 11 jogadores que iniciaram a segunda partida da final tinham então as seguintes idades:

31 26 35 22 20 32 25 24 30 19 29

BUDA MENDES/GETTY IMAGES

O Atlético Mineiro sagrou-se campeão da Copa do Brasil em 2014.

Se as idades dos jogadores fossem dispostas em ordem crescente, qual idade ocuparia a posição central dessa disposição?

Colocando essas idades em ordem crescente, temos:

19 20 22 24 25 **26** 29 30 31 32 35

Posição central

O valor central dessa disposição ordenada é 26 e é chamado **mediana**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se o conjunto de dados tiver um número par de elementos, haverá dois valores centrais. Nesse caso, a mediana será a média aritmética desses dois valores centrais.

Observe o exemplo:

20 22 22 | 24 26 | 28 28 30

$$\text{mediana} = \frac{24 + 26}{2} = 25$$

Veja que, nesse caso, a mediana não é um elemento do conjunto de dados.

Moda

Acompanhe a situação a seguir.

- Rui participa de um grupo de estudos para as Olimpíadas de Matemática. Os colegas desse grupo têm as idades representadas no quadro ao lado.

12	11	12	11	13	11	11	12
13	13	14	12	13	12	15	12
12	11	14	12	11	12	12	14

Contamos o número de colegas que têm 11, 12, 13, 14 e 15 anos e representamos esses dados na tabela ao lado.

Idade	Número de alunos
11	6
12	10
13	4
14	3
15	1

Dados obtidos por Rui.

Observe que 12 é a idade que aparece o maior número de vezes. Dizemos que 12 é a **moda** dessa série de números.

Se nessa situação tivéssemos 10 alunos com 12 anos e 10 alunos com 13, diríamos que esse conjunto de dados tem duas modas: 12 anos e 13 anos.

Se o conjunto de dados não tiver elemento repetido, ele não terá moda e será chamado de amodal.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Veja no quadro o registro diário de Carlos com a quantidade de pizzas que vendeu nos meses de abril e maio. Determine a moda e a mediana dessas quantidades.

Abril	31	59	28	47	69	28	43	19	28	41	35	31	31	55	28	11	31	21
Maio	53	62	62	41	32	47	35	32	58	39	32	59	49	42	32	59	70	—

Abril → modas: 28 e 31; mediana: 31. Maio → moda: 32; mediana: 47.

2 As notas abaixo foram obtidas pelos alunos de uma turma na primeira prova de Matemática do bimestre. Calcule a média e determine a mediana e a moda dessa sequência de notas.

média: 5,0;
mediana: 5,3;
moda: 5,7

Prova de Matemática 1ª etapa – Notas dos 32 alunos do 7º ano							
0,0	1,0	2,3	3,7	5,3	5,7	7,7	9,3
0,3	1,3	2,7	3,7	5,7	6,8	8,3	9,7
0,7	1,7	3,6	5,0	5,7	7,0	8,7	10,0
1,0	2,0	3,7	5,3	5,7	7,7	8,7	10,0

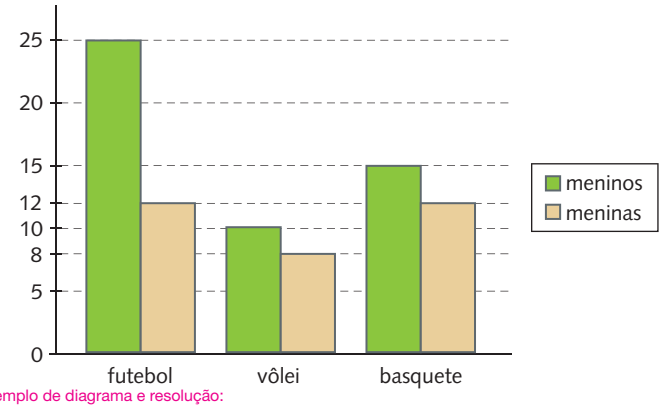
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

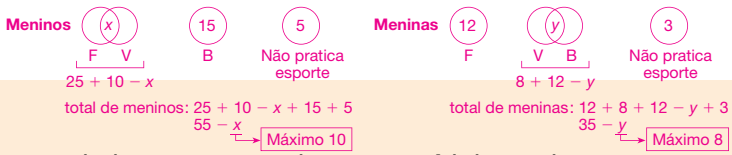
(OBM) O gráfico ao lado refere-se à prática esportiva dos alunos do 6º ano de uma escola. Nenhum dos meninos que jogam futebol ou vôlei joga basquete e nenhuma menina que joga basquete ou vôlei joga futebol. Há cinco meninos e três meninas que não praticam nenhum dos três esportes. Pelo menos quantos alunos há no 6º ano? alternativa **e**

a) 37 c) 50 e) 72
b) 45 d) 64



LUIZ RUBIO

Exemplo de diagrama e resolução:



total de meninos: $25 + 10 - x + 15 + 5$
$55 - x$ → Máximo 10

total de meninas: $12 + 8 + 12 - y + 3$
$35 - y$ → Máximo 8

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Monte uma tabela ou um diagrama para relacionar a quantidade de meninos e os esportes praticados. $55 - x$, em que x é o número de meninos que praticam futebol e vôlei.
- Faça o mesmo para a quantidade de meninas e os esportes.
  $35 - y$, em que y é o número de meninas que praticam vôlei e basquete.

Plano de resolução

- O número de meninos que praticam futebol e vôlei pode ser no máximo quanto? 10
- Encontre o número máximo de meninas que praticam basquete e vôlei. 8

Resolução

- Forme um trio para a resolução.
- Mostre aos colegas seu plano de resolução, veja os deles e verifique se há ideias comuns entre vocês.
- O trio deverá discutir quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolher um dos planos para a execução do processo de resolução.

Resposta pessoal. $55 + 35 - 10 - 8 = 72$

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual em seus cadernos.

Verificação

- O grupo deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Cada trio deverá apresentar sua estratégia de resolução de forma oral. Os diagramas elaborados na resolução devem ser explicados para a classe. Ao final, todas as estratégias devem ser registradas no caderno.
  Compare os diversos diagramas criados pelos alunos, estimulando a diversidade de pensamento entre os grupos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Explique a que se refere a área da Estatística.
A Estatística é a parte da Matemática que coleta, organiza e analisa dados sobre determinado assunto.

2 O que você entende por experimento aleatório? Dê um exemplo. Resposta pessoal. Espera-se que o aluno perceba que um experimento aleatório é aquele que pode ser repetido inúmeras vezes nas mesmas condições, e em que conhecemos os resultados possíveis, mas não podemos assegurar qual será o resultado final. Exemplo: lançamento de uma moeda.

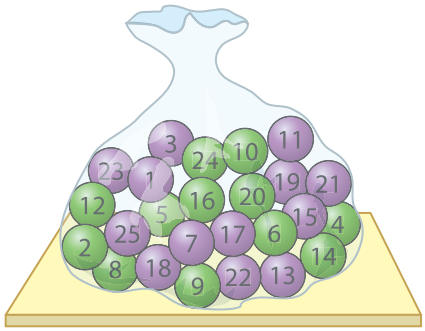
3 Neste capítulo, você estudou média aritmética simples e ponderada. Qual a diferença entre elas? A média aritmética ponderada é usada quando são atribuídos pesos a uma das grandezas.

4 Há uma diferença na determinação da mediana de um número par de dados com relação à de um número ímpar de dados. Como ela se dá? Após escrever os valores em ordem crescente, a mediana é o valor que ocupa a posição central, no caso de uma série com quantidade ímpar de dados. No caso de quantidade par de dados, devemos calcular a média aritmética dos dois termos centrais.

5 É possível que uma série de dados não apresente moda? Explique.
Sim, basta que não haja repetição de valores.

Aplicando

1 Em um saco há 25 bolas numeradas de 1 a 25. Retirando ao acaso uma bola do saco:



EDUARDO FRANCISCO

a) é mais provável que saia um número ímpar ou um número par? ímpar

b) qual é a probabilidade de sair um número par? $\frac{12}{25}$

2 De uma urna com seis bolas azuis, cinco verdes, quatro amarelas, três roxas e duas laranja sacamos, aleatoriamente, uma bola. Qual é a probabilidade de que saia uma bola azul? E laranja?
$\frac{6}{20}$ ou $\frac{3}{10}$; $\frac{2}{20}$ ou $\frac{1}{10}$

EDUARDO FRANCISCO

Junte-se a um colega, leia e discuta com ele a resolução das questões a seguir.

3 Em um baralho, há 52 cartas, sendo 13 cartas de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas). Ao retirar uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de se obter:

a) um ouro? $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

b) um rei? $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

4 Márcia construiu a máquina abaixo.

EDUARDO FRANCISCO

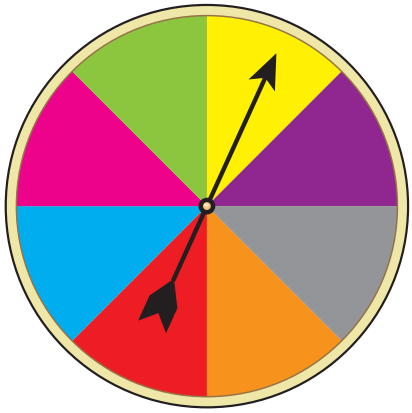
recipiente A; probabilidade $\frac{1}{2}$

a) Se ela introduzir uma bolinha na máquina, em que recipiente é mais provável que a bolinha caia? Por quê?

b) Qual é a probabilidade de uma bolinha cair no recipiente C? $\frac{1}{4}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5 A roda representada a seguir é formada por 8 cores diferentes.



GUILHERME CASAGRANDI

Ao girar a seta da roleta, ela pode parar com igual probabilidade em qualquer uma das cores. Reúna-se com um colega e respondam às questões.

a) Qual é a probabilidade de a seta parar na cor rosa? $\frac{1}{8}$

b) Escolham duas cores. Qual é a probabilidade de a seta parar em uma delas? $\frac{1}{4}$

c) Considerando as duas cores escolhidas, qual é a probabilidade de a seta não parar em nenhuma dessas cores? $\frac{3}{4}$

d) Qual é a soma das probabilidades obtidas nos itens **b** e **c**? 1

6 Uma empresa comprou 40 *smartphones* para seus executivos, em tipos de aparelhos distribuídos de acordo com o quadro abaixo.

Aparelho	Quantidade	Preço unitário
Tipo A	20	R$ 1 200,00
Tipo B	10	R$ 1 500,00
Tipo C	10	R$ 1 800,00

Determine o preço médio dos *smartphones* nessa compra. R$ 1 425,00

7 Determine a mediana e a moda da sequência das idades dos primos de Lorenzo: 5, 11, 15, 8, 7, 15, 20, 12 11,5 e 15

8 Em um jogo do Campeonato Paulista de Futebol foram vendidos 60 000 ingressos. Os preços variavam de acordo com o representado no quadro abaixo.

Local	Preço	Número de ingressos
Arquibancadas	R$ 45,00	46 000
Cadeiras superiores	R$ 90,00	9 000
Cadeiras inferiores	R$ 60,00	5 000

Qual foi o preço médio do ingresso nesse jogo? 53 reais

9 **(Enem)** Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0. Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe: alternativa **d**

a) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.

b) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.

c) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.

d) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.

e) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10 **(Enem)** A tabela mostra alguns dados da emissão de dióxido de carbono de uma fábrica, em função do número de toneladas produzidas.

Produção (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes por milhão – ppm)
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03
1,7	3,25
1,8	3,48
1,9	3,73
2,0	4,00

Fonte: Cadernos do Gestar II, Matemática TP3. Disponível em: <www.mec.gov.br>. Acesso em: 14 jul. 2009.

Os dados na tabela indicam que a taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono (em ppm) e a produção (em toneladas) é: alternativa **d**

a) inferior a 0,18.
b) superior a 0,18 e inferior a 0,50.
c) superior a 0,50 e inferior a 1,50.
d) superior a 1,50 e inferior a 2,80.
e) superior a 2,80.

11 **(Enem)** O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0.

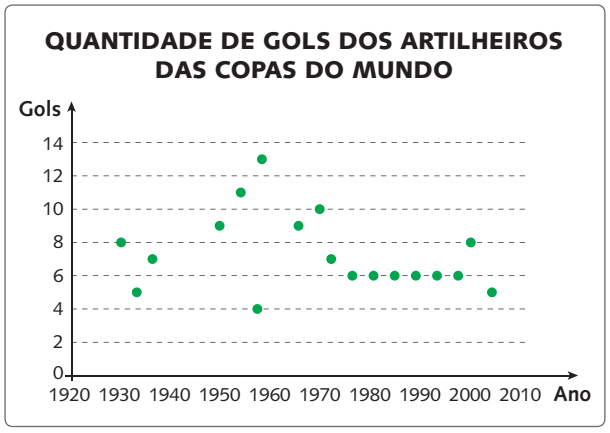
Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir: alternativa **d**

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39	1
38	10
37	3
36	5
35	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36, a probabilidade de ela calçar 38 é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{14}$

12 **(Enem)** O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006. alternativa **b**



GUILHERME CASAGRANDI

Disponível em: <http://www.suapesquisa.com>. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

a) 6 gols
b) 6,5 gols
c) 7 gols
d) 7,3 gols
e) 8,5 gols

13 **(Enem)** A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009: alternativa **c**

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Disponível em: <http://www.obmep.org.br>. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro na região Nordeste?

a) 14,6%
b) 18,2%
c) 18,4%
d) 19,0%
e) 21,0%

14 **(Enem)** Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a: alternativa **b**

a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C
b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C
c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C
d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C
e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C

15 **(Enem)** O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols. alternativa **e**

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então:

a) $X = Y < Z$
b) $Z < X = Y$
c) $Y < Z < X$
d) $Z < X < Y$
e) $Z < Y < X$

16 **(Enem)** A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que este investidor escolhe comprar são: alternativa **d**

a) Balas W e Pizzaria Y.
b) Chocolates X e Tecelagem Z.
c) Pizzaria Y e Alfinetes V.
d) Pizzaria Y e Chocolates X.
e) Tecelagem Z e Alfinetes V.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

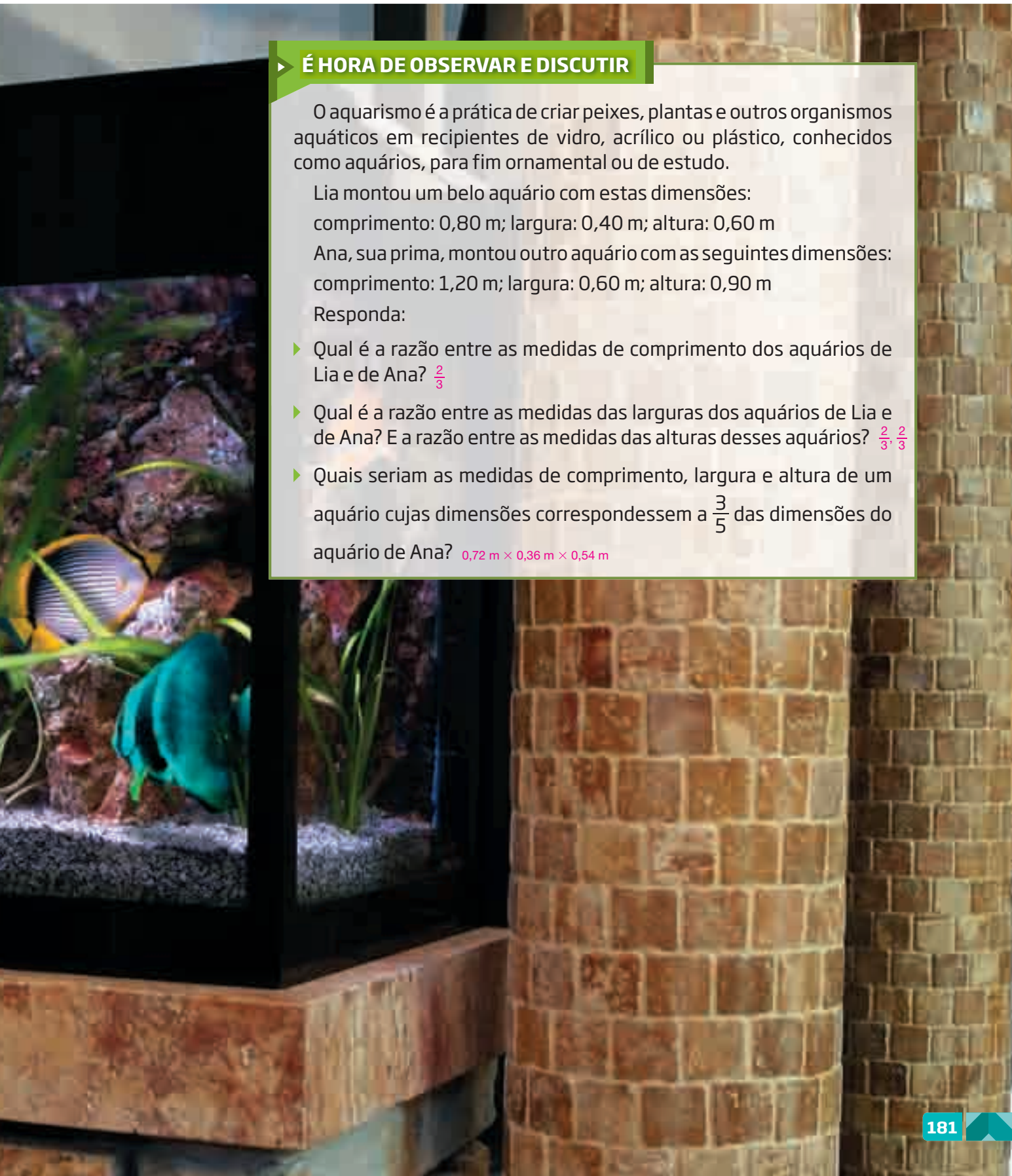
CAPÍTULO

9 PROPORÇÃO

RADE KOVAC/SHUTTERSTOCK

Aquário ornamental com várias espécies de peixe e ambientação artificial.

Neste capítulo, vamos trabalhar o conceito de proporção, suas propriedades e aplicações. Vamos resolver diversos problemas envolvendo números direta e inversamente proporcionais. No problema da página de abertura, apresentamos o conceito de proporção como uma igualdade entre duas razões.



É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

O aquarismo é a prática de criar peixes, plantas e outros organismos aquáticos em recipientes de vidro, acrílico ou plástico, conhecidos como aquários, para fim ornamental ou de estudo.

Lia montou um belo aquário com estas dimensões:

comprimento: 0,80 m; largura: 0,40 m; altura: 0,60 m

Ana, sua prima, montou outro aquário com as seguintes dimensões:

comprimento: 1,20 m; largura: 0,60 m; altura: 0,90 m

Responda:

- Qual é a razão entre as medidas de comprimento dos aquários de Lia e de Ana? $\frac{2}{3}$
- Qual é a razão entre as medidas das larguras dos aquários de Lia e de Ana? E a razão entre as medidas das alturas desses aquários? $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$
- Quais seriam as medidas de comprimento, largura e altura de um aquário cujas dimensões correspondessem a $\frac{3}{5}$ das dimensões do aquário de Ana? 0,72 m × 0,36 m × 0,54 m

TROCANDO IDEIAS

Faça as atividades no caderno.

Roberto e Pedro passeiam cada um com seu cachorro. Roberto tem massa de 120 kg, e seu cachorro, de 40 kg. Pedro, por sua vez, tem massa de 48 kg, e seu cachorro, de 16 kg.

- Qual é a razão entre a massa de Roberto e a de Pedro? $\frac{5}{2}$
- Qual é a razão entre a massa do cachorro de Roberto e a do cachorro de Pedro? $\frac{5}{2}$
- As razões encontradas são iguais? Justifique sua resposta. sim, pois: $\frac{120}{48} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$

GEORGE TUTUMI

Na situação acima vimos a igualdade entre duas razões: uma entre as massas dos jovens e a outra entre as massas dos respectivos cachorros.

Caso Roberto e Pedro trocassem os animais entre si, isto é, um ficasse com o animal do outro, a razão entre as massas dos jovens seria, agora, igual ao inverso da razão das massas dos cachorros trocados.

Tanto a igualdade das razões diretas quanto a igualdade das razões inversas serão objeto de nosso estudo neste capítulo, ou seja, vamos estudar as proporções e suas propriedades.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Proporção

Em carros com motor bicombustível, é possível utilizar como combustível uma mistura de etanol e gasolina.

Vamos supor que, no tanque de 50 ℓ de um carro, foram colocados 10 ℓ de etanol e 40 ℓ de gasolina. Já o tanque de 60 ℓ de outro carro foi preenchido com 12 ℓ de etanol e 48 ℓ de gasolina.

Observe as razões entre a quantidade de etanol e a de gasolina nos dois tanques:

- tanque de 50 ℓ $\longrightarrow$ $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$
- tanque de 60 ℓ $\longrightarrow$ $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$

Pergunte aos alunos: "Como vocês interpretam a razão $\frac{1}{4}$ obtida nesta situação?"

Eles devem entender que tanto no tanque de 50 ℓ como no de 60 ℓ, para cada litro de etanol colocado, foram colocados 4 ℓ de gasolina.

Verificamos que as duas razões são iguais; nesse caso, dizemos que as duas razões formam uma **proporção**. Essa proporção é assim indicada: $\frac{10}{40} = \frac{12}{48}$.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

A proporção $\frac{10}{40} = \frac{12}{48}$ também pode ser indicada assim: $10 : 40 = 12 : 48$

UM POUCO DE HISTÓRIA

Surgimento dos conceitos de proporção

A palavra **proporção**, do latim *proportionis*, significa "uma relação entre as partes de uma grandeza".

A ideia de proporção é atribuída a Pitágoras (c. 580 a.C.-500 a.C.), embora haja dúvida sobre isso. Na Antiguidade, o estudo das proporções presumivelmente fazia parte da Aritmética ou da teoria pitagórica dos números.

Eudoxo de Cnido, discípulo de Platão, matemático e filósofo grego que viveu entre 408 a.C. e 355 a.C., deu nova definição para os teoremas relacionados a proporções. Essa definição foi exposta no Livro V de *Os elementos*, de Euclides (330 a.C.-?), e é a que conhecemos e usamos hoje em dia.

Dados obtidos em: BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1974. p. 34, 61, 66.

TOMA

Eu, de boa vontade, morreria queimado como Faeton, se esse fosse o preço a pagar para alcançar o Sol e saber qual é sua forma, seu tamanho e sua substância.

Eudoxo.

DIOGO SAITO

Lendo e aprendendo

Homem vitruviano

O desenho *Homem vitruviano*, de Leonardo da Vinci (1452-1519), das proporções do corpo humano, baseou-se nos estudos do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (70 a.C.-25 a.C.). Esse desenho representa uma figura humana de proporções perfeitas, inserida em um círculo e em um quadrado, formas geométricas consideradas perfeitas. O umbigo demarca o centro do círculo.

Observe algumas dessas proporções:

- as medidas da face (do queixo ao topo da testa) e da altura do corpo estão na razão $\frac{1}{10}$;
- as medidas dos braços abertos e da altura do corpo são iguais, isto é, estão na razão $\frac{1}{1}$.
- As medidas da distância entre o cotovelo e a ponta da mão e da altura do corpo estão na razão $\frac{1}{4}$.

GALLERIA DELL' ACCADEMIA, VENEZA

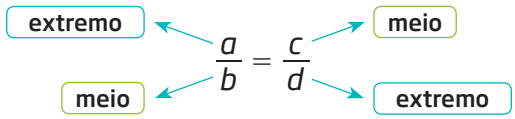
Homem vitruviano (1490), de Leonardo da Vinci. Lápis e tinta sobre papel, 34 cm × 24 cm.

Dados obtidos em: <http://virusdaarte.net/leonardo-da-vinci-o-homem-vitruviano>. Acesso em: 17 mar. 2015.

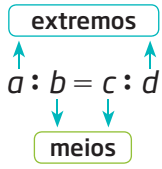
Elementos de uma proporção

Dados quatro números não nulos, a, b, c e d, nessa ordem, dizemos que eles formam uma proporção quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: "a está para b assim como c está para d").

Os **termos** de uma proporção são assim denominados:



ou



Por exemplo, na proporção $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$, os extremos são 3 e 36, e os meios, 4 e 27.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Por que podemos afirmar que $\frac{6}{9}$ e $\frac{10}{15}$ formam uma proporção?

Porque existe uma igualdade entre as razões.

2 Escreva, no caderno, como se leem as proporções e identifique os meios e os extremos de cada uma delas.

a) $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ b) $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$

a) três está para cinco, assim como nove está para quinze; meios, 5 e 9; extremos, 3 e 15.

b) sete está para oito, assim como catorze está para dezesseis; meios, 8 e 14; extremos, 7 e 16.

3 Observe as razões:

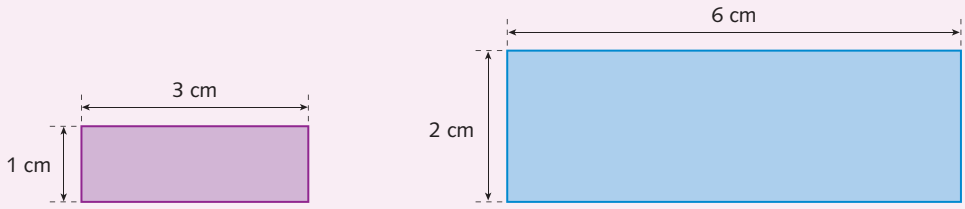
$\frac{1,5}{3,5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{20,1}{33,5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{2,5}{3,75}$

Indique os pares de razões que formam proporções. $\frac{1,5}{3,5} = \frac{3}{7}$; $\frac{20,1}{33,5} = \frac{3}{5}$; $\frac{2,5}{3,75} = \frac{2}{3}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Observe as figuras abaixo e responda às questões.



LUIZ RUBIO

a) Qual é a razão entre as medidas da largura dos dois retângulos? $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{1}$

b) Qual é a razão entre as medidas do comprimento dos dois retângulos? $\frac{3}{6}$ ou $\frac{6}{3}$

c) Podemos afirmar que as medidas correspondentes das figuras são proporcionais? Justifique sua resposta. sim, pois: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ ou $\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Propriedade fundamental das proporções

A nau *Santa Maria* era uma das embarcações da esquadra comandada por Cristóvão Colombo (1451–1506) na viagem em que os europeus chegaram ao continente americano, em 1492. Em um museu há uma miniatura dessa nau na escala 1 : 65, com 56 cm de comprimento. Com base nessa informação, como podemos saber qual era a medida do comprimento real da embarcação?

Indicando por x a medida do comprimento real, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{1}{65} = \frac{56}{x}$$

$$\frac{1}{65} \cdot x = \frac{56}{x} \cdot x$$

Multiplicando os dois membros da igualdade por x, sendo $x \neq 0$.

$$\frac{1 \cdot x}{65} = 56$$

$$\frac{1 \cdot x}{65} \cdot 65 = 56 \cdot 65$$

Multiplicando os dois membros da igualdade por 65.

$$1 \cdot x = 56 \cdot 65$$

$$x = 3640$$

MUSEU MARÍTIM DE BARCELONA

Miniatura da nau *Santa Maria*.

Portanto, a medida do comprimento real da embarcação era 3640 cm ou 36,40 m.

Ao desenvolver a resolução da proporção do exemplo acima, podemos observar que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos:

$$\frac{1}{65} = \frac{56}{x} \Rightarrow 1 \cdot x = 56 \cdot 65$$

Essa observação é válida para toda proporção. Acompanhe a demonstração a seguir.

Demonstração

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, em que a, b, c e d representam números racionais não nulos.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por d.

$\frac{a}{b} \cdot d = \frac{c}{d} \cdot d$

$\frac{a \cdot d}{b} = \frac{c \cdot \cancel{d}}{\cancel{d}}$

$\frac{a \cdot d}{b} = c \cdot 1$

$\frac{a \cdot d}{b} = c$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por b.

$b \cdot \frac{a \cdot d}{b} = b \cdot c$

$\frac{\cancel{b} \cdot a \cdot d}{\cancel{b}} = b \cdot c$

$1 \cdot a \cdot d = b \cdot c$

$a \cdot d = b \cdot c$

Como a, b, c, e d representam números racionais quaisquer, exceto zero, essa propriedade é válida para toda proporção.

> Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja, dados a, b, c e d não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos $a \cdot d = b \cdot c$.

Denominamos essa propriedade como **propriedade fundamental das proporções**.

Podemos empregá-la para resolver diversos problemas.

Exemplos

- Sabendo que 5 está para 8 assim como 15 está para x, determine o valor de x.

  Para descobrir o valor de x, inicialmente escrevemos a proporção:

  $\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$

  Em seguida, aplicamos a propriedade fundamental das proporções:

  $5 \cdot x = 8 \cdot 15$

  $5x = 120$

  Multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{5}$.

  $5x \cdot \frac{1}{5} = 120 \cdot \frac{1}{5}$

  $x = \frac{120}{5}$

  $x = 24$

  Portanto, o valor de x é 24.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

• Em uma salina, de cada 1 000 dm^3 de água salgada são retirados 40 dm^3 de sal. Para obter 800 dm^3 de sal, quantos decímetros cúbicos de água salgada são necessários?

A quantidade de sal retirada é proporcional ao volume de água salgada.

Indicamos por x a quantidade de água salgada a ser determinada e escrevemos a proporção:

$$\frac{1\,000}{40} = \frac{x}{800}$$

NUNO GUIMARÃES/FRAME/FOLHAPRESS

Salinas Diamante Branco, Galinhos, RN, 2014.

Em seguida, aplicamos a propriedade fundamental das proporções:

$$40 \cdot x = 800 \cdot 1\,000$$

$$\frac{1}{40} \cdot 40 \cdot x = \frac{1}{40} \cdot 800\,000$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{40}$.

$$x = \frac{800\,000}{40} = 20\,000$$

Portanto, são necessários 20 000 dm^3 de água salgada para obter 800 dm^3 de sal.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Aplicando a propriedade fundamental, verifique quais dos pares abaixo formam uma proporção. alternativas **c** e **d**

a) $\frac{3}{11}$ e $\frac{15}{44}$

b) $\frac{4}{0{,}2}$ e $\frac{2}{40}$

c) $\frac{\frac{1}{2}}{5}$ e $\frac{3}{30}$

d) $\frac{10}{500}$ e $\frac{4}{200}$

2 Determine o valor de x de modo que as sentenças representem proporções.

a) $\frac{x}{5} = \frac{21}{35}$ 3

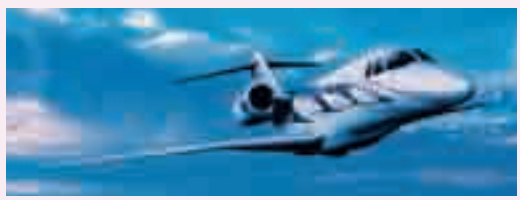
b) $\frac{15}{4} = \frac{90}{x}$ 24

c) $\frac{9}{13} = \frac{x}{26}$ 18

d) $\frac{2}{5} = \frac{x}{200}$ 80

3 Em um supermercado, de cada grupo de 10 caixas de suco vendidas, 6 são da marca D. Em um domingo, foram vendidas 500 caixas de suco. Quantas caixas de suco da marca D foram vendidas? 300

4 O *Citation Ten* já foi o avião mais rápido do mundo, atingindo uma velocidade de 1115 km/h. Esse avião consome 999 ℓ de combustível por hora. Calcule o consumo de combustível por essa aeronave em 3,5 horas de voo. 3 496,5 ℓ



ATLAS AIR SERVICE AG

Citation Ten, avião a jato intercontinental de médio porte e alta *performance* para uso civil.

5 A maquete do complexo de arranha-céus Burj Dubai foi feita na escala 1 : 400. Determine a medida da altura do Burj Dubai, sabendo que a maquete tem 1,8 m de altura. 720 m

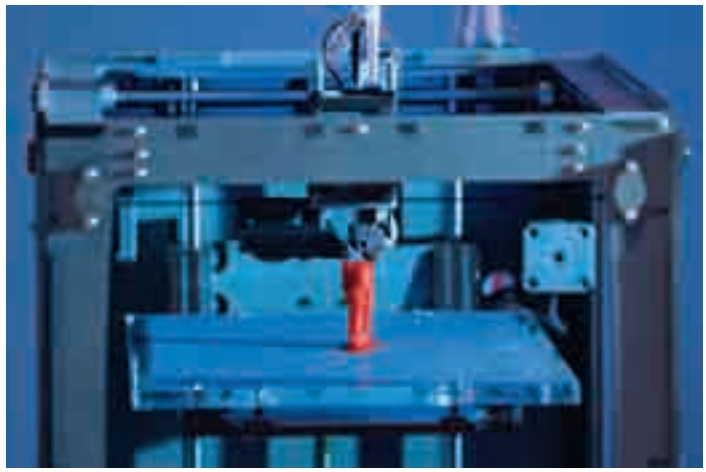
KARIM SAHIB/AFP

Maquete do Burj Dubai. Esse complexo de arranha-céus localiza-se na cidade de Dubai, nos Emirados Árabes Unidos, 2007.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Sequências de números diretamente proporcionais

Uma impressora 3D produz, em 2 horas, 40 bonecos. Em 3 horas, essa mesma impressora produz 60 bonecos, em 4 horas, 80 bonecos, e, em 5 horas, 100 bonecos.



OLI SCARFF/GETTY IMAGES/AFP

Exibição de impressora 3D no Science Museum. Londres, Inglaterra, 2013.

Calculando a razão entre o tempo utilizado na produção e o número de bonecos produzidos, observamos uma igualdade.

$$\frac{2}{40} = \frac{3}{60} = \frac{4}{80} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

O quociente dos números da primeira sequência (a dos tempos de produção) pelos números da segunda sequência (a do número de bonecos produzidos) é sempre o mesmo número, que denominamos **constante de proporcionalidade**.

Portanto, dizemos que os números 2, 3, 4 e 5 são diretamente proporcionais aos números 40, 60, 80 e 100 e que $\frac{1}{20}$ é a constante de proporcionalidade dessas sequências. Dizemos ainda que o tempo de produção é **diretamente proporcional** ao número de bonecos produzidos.

Quando duas sequências de números são diretamente proporcionais, ao dobrar o número de uma delas, o correspondente da outra também dobra; ao reduzir pela metade o número de uma, o correspondente da outra também se reduz pela metade; e assim por diante.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

- Tia Simone dividiu 30 chocolates entre seus sobrinhos de 2, 3 e 5 anos de idade. Determine a quantidade de chocolates que cada um deles recebeu, sabendo que a divisão foi diretamente proporcional à idade de cada sobrinho.

  Vamos representar por a, b e c, respectivamente, as quantidades de chocolates recebidas pelos sobrinhos de 2, 3 e 5 anos. Assim:

  $a + b + c = 30$

  As quantidades de chocolates a, b e c são diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5. Veja:

  $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$ ← constante de proporcionalidade

GEORGE TUTUMI

Observe as igualdades:

$\frac{a}{2} = k$ $\qquad$ $\frac{b}{3} = k$ $\qquad$ $\frac{c}{5} = k$

$a = 2k$ (I) $\qquad$ $b = 3k$ (II) $\qquad$ $c = 5k$ (III)

Substituindo esses valores na equação $a + b + c = 30$, obtemos:

$a + b + c = 30$

$2k + 3k + 5k = 30$

$10k = 30$

$k = 3$

Então, substituindo k por 3 em I, II e III, temos:

$a = 2k$ $\qquad$ $b = 3k$ $\qquad$ $c = 5k$

$a = 2 \cdot 3$ $\qquad$ $b = 3 \cdot 3$ $\qquad$ $c = 5 \cdot 3$

$a = 6$ $\qquad$ $b = 9$ $\qquad$ $c = 15$

Assim, dividimos o número 30 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 5.

Portanto, os sobrinhos de 2, 3 e 5 anos receberam 6, 9 e 15 chocolates, respectivamente.

- Três pessoas associaram-se em uma empresa. A primeira investiu inicialmente R$ 12 000,00; a segunda, R$ 10 000,00; e a terceira, R$ 6 000,00. A sociedade teve lucro de R$ 21 000,00 no primeiro ano. Sabendo que o lucro deve ser repartido em quantias diretamente proporcionais ao capital inicial investido, quanto deve receber cada sócio?

GEORGE TUTUMI

Vamos representar por a, b e c as quantias que receberão o primeiro, o segundo e o terceiro sócios. Assim:

$a + b + c = 21\,000$

As quantias que receberão os três sócios deverão ser diretamente proporcionais a 12 000, 10 000 e 6 000, respectivamente. Veja:

$$\frac{a}{12\,000} = \frac{b}{10\,000} = \frac{c}{6\,000} = k$$

Observe as igualdades:

$\frac{a}{12\,000} = k$ $\qquad$ $\frac{b}{10\,000} = k$ $\qquad$ $\frac{c}{6\,000} = k$

$a = 12\,000k$ (I) $\qquad$ $b = 10\,000k$ (II) $\qquad$ $c = 6\,000k$ (III)

Substituindo esses valores na equação $a + b + c = 21\,000$, obtemos:

$a + b + c = 21\,000$

$12\,000k + 10\,000k + 6\,000k = 21\,000$

$28\,000k = 21\,000$

$k = \frac{3}{4}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Então, substituindo k por $\frac{3}{4}$ em I, II e III, temos:

$a = 12\,000k$ $\qquad$ $b = 10\,000k$ $\qquad$ $c = 6\,000k$

$a = 12\,000 \cdot \frac{3}{4}$ $\qquad$ $b = 10\,000 \cdot \frac{3}{4}$ $\qquad$ $c = 6\,000 \cdot \frac{3}{4}$

$a = 9\,000$ $\qquad$ $b = 7\,500$ $\qquad$ $c = 4\,500$

Portanto, o primeiro, o segundo e o terceiro sócios receberão R$ 9 000,00, R$ 7 500,00 e R$ 4 500,00, respectivamente.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Verifique se os números 15, 20 e 30 são diretamente proporcionais aos números 24, 32 e 48. sim

2 Divida o número 600 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 5. 120, 180 e 300

3 Divida o número 23,8 em partes diretamente proporcionais a 5 e 9. 8,5 e 15,3

4 Os números a, b e c são diretamente proporcionais a 3, 5 e 9, e o fator de proporcionalidade é 16. Determine a, b e c. 48, 80 e 144

5 Mário dividiu R$ 60 000,00 entre sua irmã Ana, de 56 anos, e seus sobrinhos Paula, de 24 anos, e Carlos, de 16 anos. Essa divisão foi diretamente proporcional à idade de cada um deles. Quanto cada um recebeu? Ana: R$ 35 000,00; Paula: R$ 15 000,00; Carlos: R$ 10 000,00

6 Um sítio de 120 hectares foi repartido entre Karine (24 anos), Kátia (26 anos) e Cristina (30 anos) em partes diretamente proporcionais à idade de cada uma. Que parte, em hectare, coube a Karine? 36 hectares

7 Uma mistura com 300 mℓ é formada por duas substâncias, A e B, tomadas em quantidades proporcionais a 3 e 7, respectivamente. Quantos mililitros de cada substância são utilizados para formar a mistura? A: 90 mℓ; B: 210 mℓ

8 Um prêmio de R$ 16 200,00 foi dividido em partes proporcionais à quantidade de pontos obtidos pelos dois primeiros colocados em uma competição. O primeiro colocado obteve 220 pontos e o segundo, 140 pontos. Quanto recebeu cada um? primeiro: R$ 9 900,00; segundo: R$ 6 300,00

9 Pedro e Paulo investiram R$ 6 000,00 e R$ 10 000,00, respectivamente, em uma empresa. Ao final do ano, tiveram um lucro de R$ 24 000,00. Sabendo que o lucro deve ser repartido em quantias diretamente proporcionais ao capital investido, quanto coube a cada um dos sócios? Pedro: R$ 9 000,00; Paulo: R$ 15 000,00

GEORGE TUTUMI

10 Lana e Mara adquiriram um automóvel usado por R$ 50 000,00 e, em seguida, o revenderam, obtendo um lucro de R$ 10 000,00. Lana participou com R$ 45 000,00 na compra do carro. Sabendo que o lucro deve ser repartido em quantias diretamente proporcionais ao valor que cada uma contribuiu para a compra do automóvel, quanto Mara recebeu do lucro obtido? R$ 1 000,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Sequências de números inversamente proporcionais

Observe as sequências de números no quadro.

2	4	5	1
30	15	12	60

Note que: $2 \cdot 30 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 1 \cdot 60 = \mathbf{60}$

Repare que o resultado da multiplicação de cada elemento de uma sequência pelo elemento correspondente da outra sequência é igual a 60.

GEORGE TUTUMI

Podemos escrever $2 \cdot 30 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 1 \cdot 60$ como igualdades de razões:

$$\frac{2}{\frac{1}{30}} = \frac{4}{\frac{1}{15}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{1}{60}}$$

Pergunte aos alunos o que a ilustração, que é uma charge, sugere? (A massa dos rapazes é inversamente proporcional à massa das caixas que eles carregam.)

Nesse caso, dizemos que os números 2, 4, 5 e 1 são **inversamente proporcionais** aos números 30, 15, 12 e 60; e o número 60 é chamado de **constante de proporcionalidade**.

Quando duas sequências de números são inversamente proporcionais, ao dobrar o número de uma delas, o correspondente da outra se reduz pela metade; ao dividir por 3 o número de uma, o correspondente da outra é multiplicado por 3; e assim por diante.

Exemplo

- Divida o número 310 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 5.

  Vamos representar por a, b e c os números procurados.

  $a + b + c = 310$

  a, b e c são inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 5. Veja:

  $$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}} = k$$

  Observe as igualdades:

  $$\frac{a}{\frac{1}{2}} = k \qquad \frac{b}{\frac{1}{3}} = k \qquad \frac{c}{\frac{1}{5}} = k$$

  $$a = \frac{1}{2} \cdot k = \frac{k}{2} \qquad b = \frac{1}{3} \cdot k = \frac{k}{3} \qquad c = \frac{1}{5} \cdot k = \frac{k}{5}$$

  Substituindo esses valores na equação $a + b + c = 310$, obtemos:

  $a + b + c = 310$

  $\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} = 310$

  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \cdot k = 310$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

$$\left(\frac{15}{30}+\frac{10}{30}+\frac{6}{30}\right)\cdot k = 310$$

$$\frac{31}{30}\cdot k = 310$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{30}}{\cancel{31}_{1}}\cdot\frac{{}^{1}\cancel{31}}{\cancel{30}_{1}}\cdot k = \frac{30}{\cancel{31}_{1}}\cdot{}^{10}\cancel{310}$$

$$1\cdot k = 30\cdot 10$$

$$k = 300$$

Então:

$$a=\frac{1}{2}\cdot k=\frac{1}{2}\cdot 300=150 \qquad b=\frac{1}{3}\cdot k=\frac{1}{3}\cdot 300=100 \qquad c=\frac{1}{5}\cdot k=\frac{1}{5}\cdot 300=60$$

Portanto, 150, 100 e 60 são inversamente proporcionais a 2, 3 e 5.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Verifique se os números 3, 4 e 5 são inversamente proporcionais aos números 60, 45 e 36. sim

2 Verifique se os números 0,2 e 0,03 são inversamente proporcionais aos números 0,15 e 1. sim

3 A sucessão a, b e c é formada por números inversamente proporcionais a 2, 5 e 7, e o fator de proporcionalidade é 70. Determine a, b e c. $a = 35$, $b = 14$ e $c = 10$

4 Divida o número 340 em partes inversamente proporcionais a 2, 4 e 10. 200, 100 e 40

5 Divida 182 em partes inversamente proporcionais a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$. 42, 56 e 84

6 Lúcio dividiu 260 laranjas em três caixas, em quantidades inversamente proporcionais a 2, 3 e 4. Quantas laranjas foram colocadas em cada caixa? primeira caixa: 120 laranjas; segunda caixa: 80 laranjas; terceira caixa: 60 laranjas

GEORGE TUTUMI

7 Os números a, b e c são inversamente proporcionais aos números 5, 12 e 20, e o fator de proporcionalidade é 240. Determine esses números. $a = 48$, $b = 20$ e $c = 12$

8 Tia Rosinha resolveu dividir 33 livros entre Beto, Ana e Vera, em partes inversamente proporcionais às suas faltas à escola durante o mês. Quantos livros recebeu cada um deles, sabendo que Beto, Ana e Vera tiveram uma, duas e três faltas, respectivamente? Beto: 18 livros; Ana: 9 livros; Vera: 6 livros

9 Caroline, Sofia e Nicole ganharam um prêmio em espécie por formarem a equipe com a melhor produtividade semestral na empresa em que trabalham.

Elas resolveram dividir o prêmio de R$ 2 640,00 em partes inversamente proporcionais aos seus salários; assim, quem tem salário menor recebe uma parte maior do prêmio e quem tem salário maior recebe uma parte menor do prêmio. O salário de Caroline equivale a 2 salários mínimos, o de Sofia, a 8 salários mínimos, e o de Nicole, a 5 salários mínimos. Quanto coube a cada uma delas?

GEORGE TUTUMI

Caroline recebeu R$ 1 600,00; Sofia, R$ 400,00; e Nicole, R$ 640,00.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

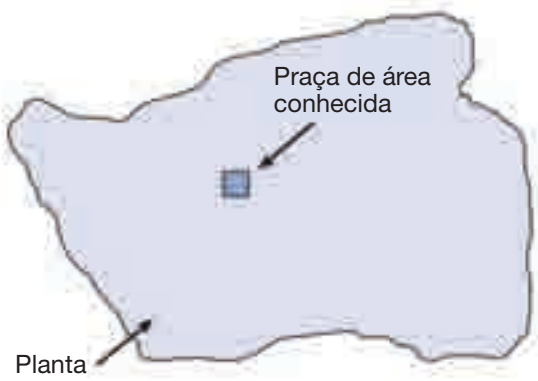
Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Enem) Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 m × 100 m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é de, aproximadamente:

a) 800.
b) 10 000.
c) 320 000.
d) 400 000.
e) 5 000 000.

alternativa **e**



GEORGE TUTUMI

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Determine a área real da praça. $(100 \times 100)\ m^2 = 10\,000\ m^2$
- Sabendo que outra praça dessa cidade tem área de 20 000 m^2, qual seria a massa do recorte correspondente a essa praça? E se a área da praça fosse 30 000 m^2, qual seria a massa do recorte correspondente? 0,16 g; 0,24 g
- Nessa situação, os números que expressam a área e os números que expressam a massa são direta ou inversamente proporcionais? Justifique.

Diretamente proporcionais. Exemplos de justificativas:
• Quando a área dobra, a massa também dobra; quando a área triplica, a massa também triplica; e assim por diante.
• $\frac{10\,000}{0,08} = \frac{20\,000}{0,16} = \frac{30\,000}{0,24} = 125\,000$ (as razões entre os números que expressam a área e os números que expressam a massa são iguais)

Plano de resolução

- Escreva a razão entre a área da praça e a massa do recorte da praça. $\frac{10\,000}{0,08}$
- Escreva a razão entre a área da cidade (A_c) e a massa da planta da cidade. $\frac{A_c}{40}$
- Como você poderia descobrir a área da cidade a partir das razões que obteve nos itens anteriores? Espera-se que os alunos reconheçam que é possível montar a proporção: $\frac{10\,000}{0,08} = \frac{A_c}{40}$

Resolução

- Junte-se a dois colegas.
- Comparem os planos de resolução e verifiquem se eles contêm ideias comuns.
- Discutam as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um deles para a execução do processo de resolução. Resposta pessoal. $\frac{10\,000}{0,08} = \frac{A_c}{40} \Rightarrow A_c \cdot 0,08 = 10\,000 \cdot 40$

$A_c = 5\,000\,000\ m^2$

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Verificação

- O grupo deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Usando o mesmo procedimento descrito no enunciado desse problema, calculem a área do município em que vocês moram (ou a do bairro em que fica a escola) com base nas dimensões de algum local conhecido escolhido pelo grupo.

Professor, incentive os alunos a pesquisar diferentes locais. Ao final, compare os resultados obtidos pelos grupos.
Oriente os alunos a representar as plantas do município e do local conhecido em um papelão grosso e mais pesado que uma folha de papel para facilitar a medição da massa, uma vez que é mais difícil ter acesso a uma balança de precisão.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Razão e proporção se relacionam? De que maneira?
Sim, pois proporção é uma igualdade entre razões.

2 Cite uma situação na qual é útil aplicar a propriedade fundamental das proporções.

2. Uma situação bastante útil é a resolução de problemas em que são dados números que se relacionam proporcionalmente (direta ou inversamente) e são conhecidos apenas três dos quatro valores.

3 No caderno, escreva duas sequências de números diretamente proporcionais e determine a constante de proporcionalidade. Resposta pessoal.

4 No caderno, escreva duas sequências de números inversamente proporcionais e determine a constante de proporcionalidade. Resposta pessoal.

5 Como devemos proceder para saber se duas sequências de números são inversamente proporcionais? Devemos verificar se o produto de cada elemento de uma sequência pelo elemento correspondente da outra sequência é o mesmo número.

Aplicando

1 Junte-se a dois colegas, leiam o texto abaixo e, respondendo às perguntas, tentem resolver a questão nele proposta.

Três dias depois, aproximávamo-nos das ruínas de pequena aldeia [...] quando encontramos, caído na estrada, um pobre viajante, roto e ferido.

Socorremos o infeliz e dele próprio ouvimos o relato de sua aventura.

Chamava-se Salém Nasair, e era um dos mais ricos mercadores de Bagdá. [...] A caravana foi saqueada e quase todos os seus componentes pereceram nas mãos dos beduínos. Ele — o chefe — conseguira, milagrosamente, escapar, oculto na areia, entre os cadáveres dos seus escravos.

E, ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-nos com voz angustiosa:

— Trazeis, por acaso, ó muçulmanos, alguma coisa que se possa comer? Estou quase, quase a morrer de fome!

— Tenho, de resto, três pães — respondi.

— Trago ainda cinco! — afirmou, a meu lado, o Homem que Calculava.

— Pois bem — sugeriu o xeique —, juntemos esses pães e façamos uma sociedade única. Quando chegar a Bagdá prometo pagar com 8 moedas de ouro o pão que comer!

[...]

E dirigindo-se ao Homem que Calculava disse-lhe:

— Vais receber, pelos cinco pães, cinco moedas!

E voltando-se para mim, ajuntou:

— E tu, ó bagdali, pelos três pães, vais receber três moedas!

Com grande surpresa, o calculista objetou respeitoso:

— Perdão, ó xeique. A divisão, feita desse modo, pode ser muito simples, mas não é matematicamente certa! Se eu dei 5 pães devo receber 7 moedas; o meu companheiro bagdali, que deu 3 pães, deve receber apenas uma moeda.

[...]

— Como justificar, ó estrangeiro, tão disparatada forma de pagar 8 pães com 8 moedas? Se contribuíste com 5 pães, por que exiges 7 moedas? Se o teu amigo contribuiu com 3 pães, por que afirmas que ele deve receber uma única moeda?

[...]

Fonte: Malba Tahan.
O homem que calculava.
Rio de Janeiro: Record, 2003.

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

Para entender o raciocínio do Homem que Calculava, respondam:

a) Se cada pão era repartido em 3 pedaços iguais, quantos pedaços ao todo as três pessoas comeram? Quantos pedaços cada viajante comeu? 24; 8

b) Em quantos pedaços os pães do bagdali foram divididos? E quantos desses pedaços, descontando os que o bagdali comeu, foram dados para Salém? 9; 1

c) Em quantos pedaços os pães de Beremiz, o Homem que Calculava, foram divididos? E quantos desses pedaços, descontando os que Beremiz comeu, foram dados para Salém? 15; 7

d) A distribuição das moedas, sendo uma moeda para o bagdali e sete moedas para Beremiz, é proporcional à distribuição de pedaços de pão?

Sim, pois o bagdali deu 1 pedaço e Beremiz deu 7 pedaços.

2 Determine o valor de A em cada uma das proporções a seguir:

a) $\frac{A}{10} = \frac{14,4}{12}$ $A = 12$

b) $\frac{1,5}{3} = \frac{A}{6}$ $A = 3$

c) $\frac{7}{14} = \frac{3,5}{A}$ $A = 7$

3 Determine a medida da altura de Kika e a de Elana, em centímetro, sabendo que a diferença entre as duas medidas é 40 cm e que a razão entre elas é de 7 para 9.

140 cm; 180 cm

4 Divida o número 234 em partes inversamente proporcionais aos valores absolutos de seus algarismos. 108, 72 e 54

5 Divida 150 em partes inversamente proporcionais a 2 e 3. 90 e 60

6 Determine dois números cuja razão é $\frac{7}{11}$ e cuja soma é 90. 35 e 55

7 Em um canal de televisão, são intercalados 25 minutos de programação com 7 minutos de anúncios comerciais. Em 70 minutos de programação, quantos minutos são reservados para os anúncios? 19,6 minutos

Solicite aos alunos que leiam com muita atenção o enunciado da questão.

8 O projeto da nova Arena Castelão, em Fortaleza (CE), foi orçado em R$ 520 000 000,00. Supondo que o consórcio responsável por essa construção era composto de quatro grandes empresas e que o valor total do orçamento foi dividido em cotas diretamente proporcionais aos números 11, 16, 18 e 20, determine o valor que cada uma dessas empresas recebeu.

R$ 88 000 000,00; R$ 128 000 000,00; R$ 144 000 000,00; R$ 160 000 000,00

ARENA CASTELÃO

Arena Castelão, em Fortaleza (CE), 2012.

9 Dividi R$ 60 000,00 entre meus dois sobrinhos em quantias diretamente proporcionais à idade de cada um. Sabendo que o primeiro sobrinho tem 12 anos e o segundo recebeu R$ 12 000,00, determine a idade deste último. 3 anos

10 Certo tipo de concreto é obtido misturando-se uma parte de cimento, três de areia e seis de pedra. Determine a quantidade de areia necessária para produzir 185 cm^3 de concreto. 55,5 cm^3

11 Três sócios montaram uma empresa cujo capital inicial foi formado de acordo com o quadro abaixo. A empresa, porém, foi à falência, causando um prejuízo de R$ 42 000,00. Sabendo que esse prejuízo deve ser dividido em quantias diretamente proporcionais ao capital inicial, calcule a parcela de prejuízo de cada sócio.

A: R$ 8 400,00; B: R$ 14 700,00; C: R$ 18 900,00

Sócio	Capital inicial
A	R$ 20 000,00
B	R$ 35 000,00
C	R$ 45 000,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

10 GRANDEZAS E REGRA DE TRÊS

A colheita mecanizada tem relevância no processo produtivo das culturas. Colheita mecanizada de arroz em Cacequi (RS), 2015.

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Neste capítulo, vamos trabalhar o conceito de grandeza, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e resolução de problemas por meio de regra de três simples e composta. Nos questionamentos da página de abertura, introduza o conceito de grandeza e busque uma solução com base nos conhecimentos de proporcionalidade.

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

Colheitadeira é um equipamento agrícola destinado à colheita de lavouras, como cana-de-açúcar, algodão ou grãos (trigo, arroz, café, soja, milho, entre outros). Uma colheitadeira é capaz de colher 2 000 kg de milho por minuto ou 120 toneladas por hora.

Agora, responda:

- Trabalhando durante 6 horas, quantas toneladas essa máquina é capaz de colher? 720 toneladas
- Para colher 800 toneladas de milho com essa colheitadeira, quantas horas de trabalho são necessárias? $\frac{800}{120}$ horas $= \frac{20}{3}$ horas $= 6\frac{2}{3}$ horas, que correspondem a 6 h 40 min.

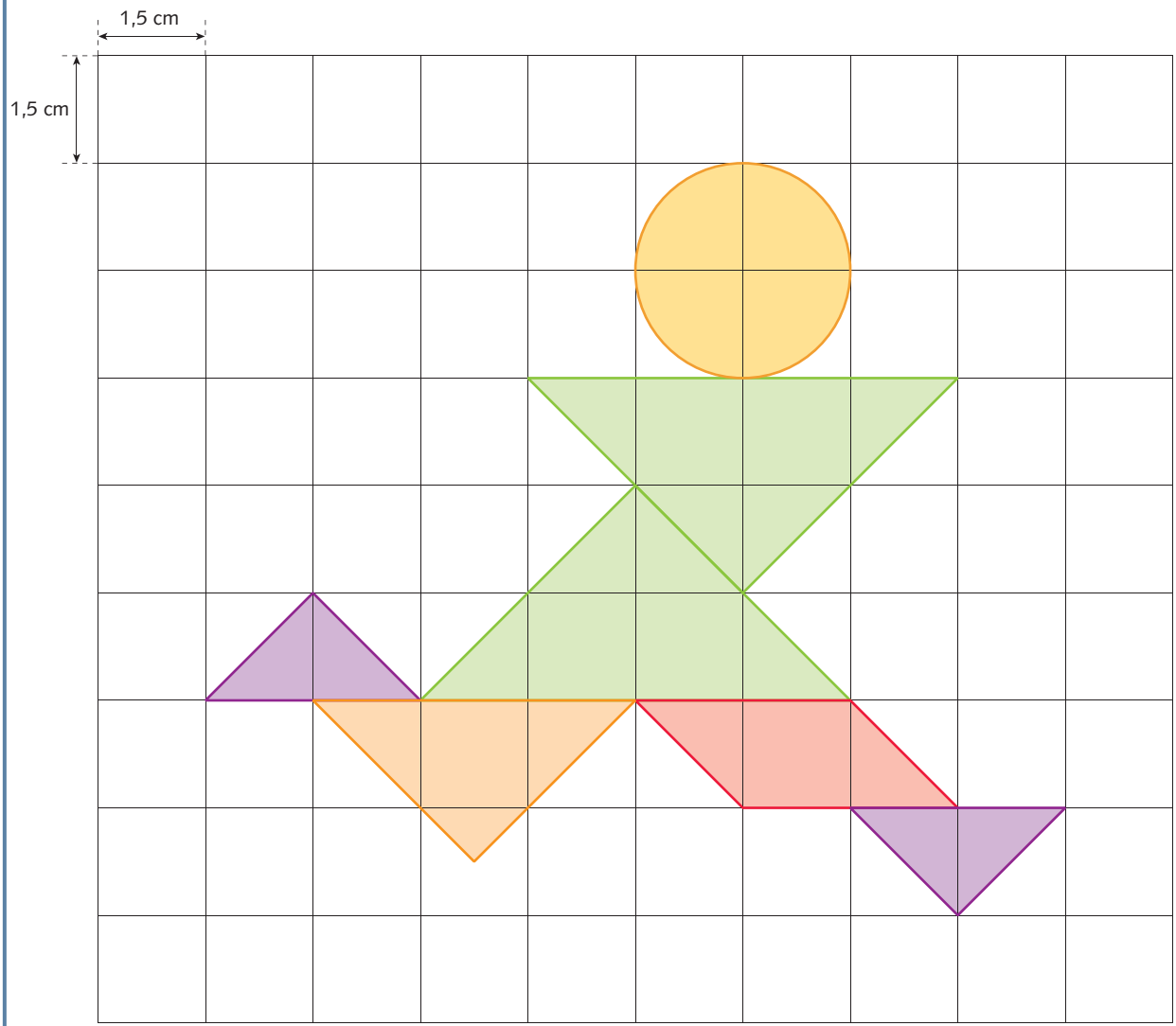
TROCANDO IDEIAS

Faça a atividade no caderno.

Observe a figura abaixo, representada na malha quadriculada em que os quadrados têm lados de medida 1,5 cm. Agora, amplie essa figura no caderno, utilizando uma malha quadriculada em que os quadrados têm lados de medida 2 cm.

Em seguida, responda:

- Qual é a razão entre as medidas da primeira e da segunda figura? $\frac{3}{4}$
- O diâmetro do círculo que representa a cabeça do boneco nessa ilustração mede 3 cm. Qual é a medida do diâmetro da cabeça do boneco na figura ampliada? 4 cm



GUILHERME CASAGRANDI

Neste capítulo, vamos estudar questões com **grandezas** e um procedimento chamado **regra de três** utilizado para resolver problemas que envolvem duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Grandezas proporcionais

No dia a dia são comuns situações em que relacionamos duas ou mais grandezas.

Observe os exemplos a seguir.

- Na produção de metais fundidos, como o ferro, utilizam-se fornos para gerar o calor necessário à **fusão**. Quanto maior o tempo de uso do forno, maior será a produção. As grandezas, nesse caso, são tempo e produção.

Fusão

Transformação da matéria, do estado sólido para o estado líquido.

RICARDO AZOURY/PULSAR IMAGENS

Fundição é o processo de obtenção de metal fundido. Volta Redonda (RJ), 2008.

- Já em uma corrida de **quilômetro contra o relógio**, quanto maior a velocidade, menor será o tempo gasto na prova. As grandezas utilizadas, nesse caso, são velocidade e tempo.

Quilômetro contra o relógio

Modalidade em que cada ciclista larga sozinho na pista, em intervalos de 90 segundos de diferença em relação aos demais competidores.

ADAM PRETTY/AFP

A australiana Anna Meares foi a mais rápida do mundo nos 500 m contra o relógio no campenato mundial, realizado em 2004, em Sydney, Austrália.

Entendemos por **grandeza** tudo o que pode ser medido ou contado. O comprimento, a superfície, o espaço que um corpo ocupa, a massa, a capacidade, a velocidade, o tempo, a produção e o custo são alguns exemplos de grandeza.

Em algumas situações, duas ou mais grandezas podem estar relacionadas. Essa relação pode ser direta ou inversamente proporcionais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Grandezas diretamente proporcionais

Observe no quadro abaixo a relação entre a produção de ferro fundido e o tempo correspondente:

		×2	×3	×4	×5	×6
Produção (kg)	100	200	300	400	500	600
Tempo (min)	5	10	15	20	25	30
		×2	×3	×4	×5	×6

A razão entre a produção de ferro fundido e o tempo será sempre a mesma. Veja:

$$\frac{100}{5} = \frac{200}{10} = \frac{300}{15} = \frac{400}{20} = \frac{500}{25} = \frac{600}{30} = \ldots = 20$$

Quando duplicamos o tempo, a produção duplica; quando triplicamos o tempo, a produção triplica; e assim por diante.

Dizemos, nesse caso, que as grandezas produção e tempo são diretamente proporcionais.

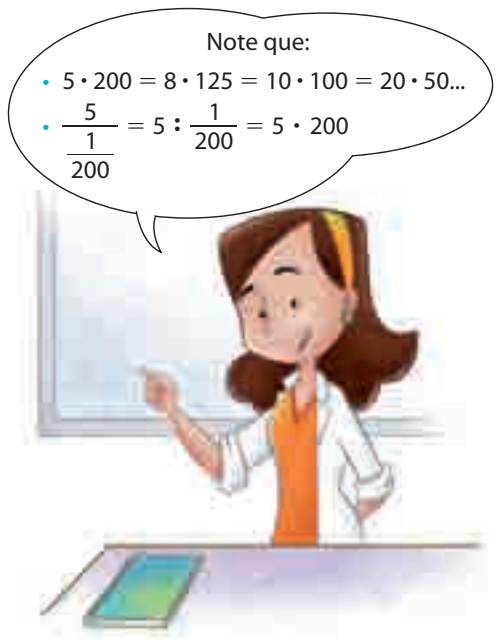
> Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando variam sempre na mesma razão. Ou seja, a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é a mesma.

Grandezas inversamente proporcionais

Observe a situação a seguir.

Uma ciclista faz um treino para uma prova de "1 000 metros contra o relógio". Observe, no quadro abaixo, o tempo utilizado pela ciclista para percorrer os 1 000 metros, com variação da velocidade média:

		×1,6	×2	×4
Velocidade média (m/s)	5	8	10	20
Tempo (s)	200	125	100	50
		:1,6	:2	:4



GEORGE TUTUMI

A razão entre a velocidade média e o inverso do valor correspondente ao tempo utilizado é sempre a mesma. Veja:

$$\frac{5}{\frac{1}{200}} = \frac{8}{\frac{1}{125}} = \frac{10}{\frac{1}{100}} = \frac{20}{\frac{1}{50}} = 1000$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Quando duplicamos a velocidade, o tempo fica reduzido à metade; quando quadruplicamos a velocidade, o tempo fica reduzido à quarta parte; e assim por diante. Dizemos, nesse caso, que as grandezas velocidade média e tempo são inversamente proporcionais.

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando uma varia sempre na razão inversa da outra. Ou seja, a razão entre os valores da primeira grandeza e o inverso dos valores correspondentes da segunda é a mesma.

Observação

Há grandezas que não são direta nem inversamente proporcionais. Por exemplo: a altura e a idade de uma pessoa.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Nos itens a seguir, classifique as grandezas envolvidas em direta ou inversamente proporcionais.

a) Distância entre duas cidades e tempo gasto no deslocamento entre elas em uma mesma velocidade. diretamente proporcionais

b) Número de operários para a construção de um muro e tempo para construí-lo em um mesmo ritmo de trabalho. inversamente proporcionais

c) Medida do lado de um quadrado e seu perímetro. diretamente proporcionais

d) Área de um gramado (em metro quadrado) e quantidade de água (em litro) necessária para molhá-lo por completo. diretamente proporcionais

e) Número de máquinas trabalhando em um mesmo ritmo e tempo necessário para asfaltar um trecho de uma avenida. inversamente proporcionais

f) Número de gols marcados e tempo de jogo. Nem direta nem inversamente proporcionais.

2 Observe as afirmações:

- Cinco canetas custam R$ 15,00.
- Dez canetas custam R$ 30,00.

Agora, responda:

O número de canetas e o custo correspondente são grandezas direta ou inversamente proporcionais? Justifique sua resposta. diretamente proporcionais, pois: $\frac{5}{15} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

3 O quadro abaixo mostra a relação entre o tempo de funcionamento de uma máquina e sua produção. Observe:

Tempo	Produção
5 horas	1 000 parafusos
8 horas	1 600 parafusos

Agora, responda:

A produção e o tempo de funcionamento dessa máquina são grandezas direta ou inversamente proporcionais? diretamente proporcionais

4 Um prêmio de R$ 60 000,00 vai ser dividido entre os funcionários de uma empresa. Observe as afirmações abaixo.

- Se houver 24 funcionários, cada um receberá R$ 2 500,00.
- Se houver 32 funcionários, cada um receberá R$ 1 875,00.

Agora, responda:

O número de funcionários e os valores recebidos são grandezas direta ou inversamente proporcionais? inversamente proporcionais

5 Choveu em cinco dos dez primeiros dias de março. Com base nesse fato, é possível afirmar que nos próximos 20 dias de março choverá por 10 dias? Justifique sua resposta. Não, nada garante essa possibilidade, pois o número de dias que chove e o número de dias do mês não são direta nem inversamente proporcionais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Regra de três simples

Quando um problema tem duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais, podemos resolvê-lo utilizando um procedimento chamado **regra de três simples**.

Observe os exemplos a seguir.

- Ana comprou 4 cadernos de um mesmo modelo por R$ 48,00. Quanto Ana gastaria para comprar 9 cadernos desse modelo?

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Veja que Ana resolveu essa questão usando a Aritmética.

Agora, vamos resolver de outro modo, usando a Álgebra. Vamos representar o valor desconhecido por uma letra, por exemplo, o x, e aplicar o fato de que a quantidade desses cadernos e o preço deles são grandezas diretamente proporcionais.

Aparentemente, nesse caso, esse procedimento pode parecer menos simples, mas trata-se de um poderoso instrumento de resolução de problemas mais complexos.

Para responder à pergunta desse exemplo, montamos inicialmente um quadro. Veja:

Quantidade de cadernos	Preço (em R$)
4	48
9	x

Diga aos alunos que o quadro poderia ser montado também desta forma:

Quantidade de cadernos	4	9
Preço (em R$)	48	x

As grandezas quantidade de cadernos e preço são diretamente proporcionais. Então, podemos montar a proporção:

$$\frac{4}{9} = \frac{48}{x}$$

A seguir, aplicamos a propriedade fundamental das proporções e resolvemos a equação. Veja:

$4 \cdot x = 9 \cdot 48$

$4x = 432$

$x = \frac{432}{4} = 108$

Portanto, Ana gastaria R$ 108,00 para comprar 9 cadernos desse modelo.

Poderíamos também montar a proporção assim: $\frac{4}{48} = \frac{9}{x}$

Peça aos alunos que expliquem por que tanto faz montar a proporção assim: $\frac{4}{48} = \frac{9}{x}$, ou assim: $\frac{4}{9} = \frac{48}{x}$

Eles devem perceber que basta aplicar a propriedade fundamental das proporções:

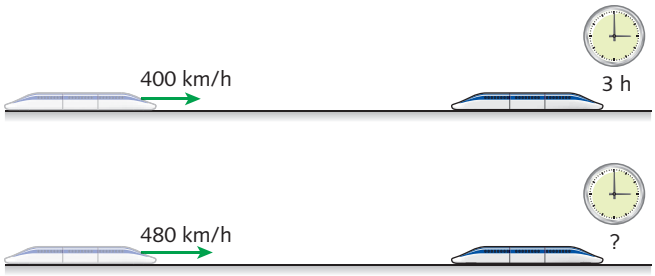
$\frac{4}{48} = \frac{9}{x}$

$4x = 9 \cdot 48$

$\frac{4}{9} = \frac{48}{x}$

O Maglev (*Magnetic levitation transport*), trem de levitação magnética, ao se deslocar a uma velocidade média de 400 km/h, faz determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo esse trem faria o mesmo percurso se a velocidade fosse de 480 km/h?

FRITZ HOFFMANN/IN PICTURES/CORBIS/LATINSTOCK



GUILHERME CASAGRANDI

O trem chinês Maglev. Xangai, China, 2003.

Para responder a essa pergunta, construímos inicialmente um quadro, em que x representa o tempo, em hora, gasto pelo trem para cobrir o percurso a uma velocidade de 480 km/h.

Velocidade média (km/h)	Tempo (h)
400	3
480	x

Verifique que dobrando a velocidade média do trem o tempo utilizado no percurso ficará reduzido à metade, triplicando a velocidade média do trem o tempo utilizado ficará reduzido à terça parte e assim por diante. Dessa forma, as grandezas velocidade média e tempo são inversamente proporcionais. Então, podemos escrever a proporção:

$$\frac{400}{480} = \frac{x}{3}$$ → Invertemos a razão.

A seguir, aplicamos a propriedade fundamental das proporções e resolvemos a equação:

$480 \cdot x = 400 \cdot 3$

$480x = 1\,200$

$x = \frac{1\,200}{480} = 2{,}5$

Peça aos alunos que calculem x de outra forma. Eles podem montar a proporção:

$\frac{400}{\frac{1}{3}} = \frac{480}{\frac{1}{x}} \Rightarrow 400 \cdot 3 = 480 \cdot x \Rightarrow x = \frac{1200}{480} = 2{,}5$

Portanto, o trem faria o mesmo percurso em 2,5 horas ou 2 horas e 30 minutos se a velocidade fosse de 480 km/h.

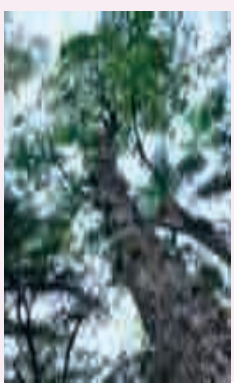
ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Três escavadeiras transportam 200 m³ de areia. Para transportar 1600 m³ de areia, quantas escavadeiras iguais a essas seriam necessárias?
24 escavadeiras

2 Um aparelho em alta velocidade irriga 2 hectares em 40 minutos. Quantos hectares seriam irrigados por esse aparelho em 2 horas, mantendo a velocidade alta? 6 hectares

3 Usando 10 ℓ de óleo de copaíba, árvore nativa da Amazônia, um caminhão com velocidade média de 60 km/h percorre 80 km. Quantos litros seriam utilizados em um percurso de 200 km na mesma velocidade?
25 litros



ALEXANDRE CARVALHO/FOTOARENA

Árvore de Copaíba, Poços de Caldas (MG), 2013.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

4 Em uma amostra de 100 g de um minério foi extraído 0,2 g de ouro. Quantos gramas de ouro podem ser extraídos de 1 kg desse minério? 2 gramas

5 O supertrem que liga Londres a Paris, através do Eurotúnel, tem velocidade média de 160 km/h e leva 40 minutos para atravessar o Canal da Mancha. Aumentando a velocidade média para 200 km/h, em quanto tempo o trem atravessa o túnel? 32 minutos

6 Uma equipe de operários, trabalhando 8 horas por dia, realizou uma obra em 20 dias. Se o número de horas de serviço fosse reduzido para 5 horas por dia, em que prazo essa equipe faria o mesmo trabalho? 32 dias

7 Em uma empresa trabalham 3 telefonistas; cada uma atende, em média, 125 ligações diárias. Aumentando para 5 o número de telefonistas, quantas ligações, em média, cada uma atenderá por dia? 75 ligações

3 Regra de três composta

Vamos agora aprender a resolver problemas que envolvem grandezas direta ou inversamente proporcionais utilizando um procedimento chamado **regra de três composta**.

Observe os exemplos a seguir.

- Em uma oficina de artesanato, 8 artesãos montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos desses carrinhos serão montados por 4 desses artesãos em 16 dias?

  Para responder a essa pergunta, construímos inicialmente um quadro, em que x representa a quantidade procurada. Veja:

Número de artesãos	Número de carrinhos	Número de dias
8	20	5
4	x	16

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Agora, vamos comparar a grandeza número de carrinhos montados, em que está o x, com cada uma das outras duas grandezas. Observe que o número de artesãos é diretamente proporcional ao número de carrinhos, e o número de dias é diretamente proporcional ao número de carrinhos.

Como a grandeza número de carrinhos é diretamente proporcional às grandezas número de artesãos e número de dias, então é proporcional ao produto delas. Assim:

$$\frac{20}{x} = \frac{8}{4} \cdot \frac{5}{16}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{40}{64}$$

A seguir, aplicamos a propriedade fundamental das proporções e resolvemos a equação. Veja:

$$\frac{20}{x} = \frac{40}{64}$$

$$40 \cdot x = 20 \cdot 64 \qquad x = \frac{1\,280}{40}$$

$$40x = 1\,280 \qquad x = 32$$

Portanto, serão montados 32 carrinhos por 4 artesãos em 16 dias.

- Em 8 horas, 20 caminhões descarregaram 160 m^3 de terra. Em 5 horas, quantos desses caminhões serão necessários para descarregar 125 m^3 de terra?

Para responder a essa pergunta, construímos inicialmente um quadro, em que x representa a quantidade procurada.

Veja:

Tempo (h)	Número de caminhões	Volume (m^3)
8	20	160
5	x	125

JOHAN LARSON/SHUTTERSTOCK

Caminhão descarregando terra.

Agora, vamos comparar a grandeza número de caminhões, em que está o x, com cada uma das outras duas grandezas. Observe que o número de caminhões é inversamente proporcional ao tempo, e o número de caminhões é diretamente proporcional ao volume. Assim, podemos escrever:

$$\frac{20}{x} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}} \cdot \frac{160}{125}$$

razão inversa

$$\frac{20}{x} = \frac{800}{1\,000}$$

A seguir, aplicamos a propriedade fundamental das proporções e resolvemos a equação.

$$\frac{20}{x} = \frac{800}{1\,000}$$

$$800 \cdot x = 20 \cdot 1\,000 \qquad x = \frac{20\,000}{800}$$

$$800x = 20\,000 \qquad x = 25$$

Portanto, serão necessários 25 desses caminhões para descarregar 125 m^3 de terra em 5 horas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 A distância ideal para assistir à TV de 29 polegadas é de, aproximadamente, 1,8 m. A pessoa deve ficar a uma distância de cerca de 2,4 vezes o tamanho da tela da TV (ou seja, 29 · 2,4 · 0,0254 m = 1,768 m). Qual é a distância ideal para assistir a um telão de 100 polegadas?
(Dado: 1 polegada = 0,0254 m.)
aproximadamente 6 m

GEORGE TUTUMI

2 Uma empresa gasta R$ 6 500,00 no café da manhã de 180 funcionários durante 30 dias. Quanto a empresa gastaria para oferecer o mesmo café da manhã para 300 funcionários durante 90 dias? R$ 32 500,00

GEORGE TUTUMI

3 Em uma disputa de tiro, uma catapulta, operando com 6 baterias de 15 minutos cada uma, lança 300 pratos de barro. Quantos pratos essa catapulta lançará com 10 baterias de 12 minutos cada?
400 pratos de barro

Os pratos de barro são lançados ao ar por catapultas acionadas por molas.

GEORGE TUTUMI

4 Um robô, trabalhando 8 horas por dia, durante 10 dias, efetua 7 500 pontos de solda em uma estrutura metálica. Quantas horas por dia esse robô deve trabalhar para efetuar 6 000 pontos de solda em 4 dias?
16 horas

5 Um navio, com tripulação de 300 homens, necessita de no mínimo 12 000 ℓ de água para efetuar uma viagem de 20 dias. Aumentando a tripulação em 150 homens e a água em 6 000 ℓ, qual poderá ser a duração da viagem? 20 dias

6 Uma equipe composta de 15 homens extrai, em 30 dias, 3,6 t de carvão. Se a equipe for aumentada para 20 homens, trabalhando no mesmo ritmo que os outros, em quantos dias eles conseguirão extrair 5,6 t de carvão? 35 dias

7 Cinco mergulhadores retiram 30 peças iguais do fundo do mar em 6 dias, mergulhando 8 horas por dia cada um. Quantos dias, com 12 horas de mergulho por dia, serão necessários para 4 mergulhadores, com o mesmo desempenho dos anteriores, retirarem 90 dessas peças? 15 dias

GEORGE TUTUMI

8 Vinte operários, trabalhando 8 horas por dia, levam 18 dias para construir um muro de 300 m. Quanto tempo levará uma turma de 16 operários, trabalhando 9 horas por dia, no mesmo ritmo dos outros, para construir um muro de 225 m? 15 dias

GEORGE TUTUMI

9 Dez guindastes móveis levam 18 dias de 8 horas de trabalho para carregar 200 contêineres em um navio. Quantos desses contêineres serão carregados em 15 dias, por 6 desses guindastes, funcionando 6 horas por dia? 75 contêineres

Contêiner é um grande recipiente metálico com dimensões padronizadas internacionalmente. Na foto, um dos contêineres está sendo erguido por um guindaste. Duisburg, Alemanha, 2013.

TUMARKIN IGOR – ITPS/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Dê alguns exemplos de grandezas. Resposta pessoal. Exemplos de resposta: comprimento, superfície, espaço que um corpo ocupa, massa, capacidade, velocidade, tempo, produção, custo.

2 Escreva uma estratégia que permita identificar se duas grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

3 Classifique os pares de grandezas a seguir em DP (diretamente proporcionais) ou IP (inversamente proporcionais).

a) Velocidade e tempo de percurso. IP

b) Velocidade e distância percorrida. DP

c) Prêmio de loteria e número de ganhadores. IP

d) Quantidade de ingressos de cinema e valor a pagar. DP

4 Existem grandezas não proporcionais, como a altura e o peso de uma pessoa. Dê um exemplo de outro par de grandezas não proporcionais.

Resposta pessoal. Exemplo de resposta: a quantidade de gols marcados e o tempo de jogo de uma partida de futebol.

5 Descreva uma situação em que três grandezas variem por relacionamento diretamente proporcional. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: "Para preparar um café saboroso, Maísa coloca 2 colheres de pó de café em 500 mℓ de água e obtém 4 xícaras de café. Quantas colheres de pó de café ela deve colocar em 750 mℓ de água para obter 6 xícaras de café?"

2. Resposta pessoal. Os alunos devem perceber que duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é a mesma e que duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira grandeza e o inverso dos valores correspondentes da segunda é a mesma.

Aplicando

1 Com uma garrafa de suco de 2 ℓ é possível encher vários copos com 100 mℓ. Aumentando a capacidade de cada copo de 100 mℓ para 200 mℓ, é possível encher mais ou menos copos? menos copos

2 Um operário faz um serviço em 6 horas. Dois operários fazem o mesmo serviço em 3 horas. Nessa situação, o número de operários e o tempo de serviço são grandezas direta ou inversamente proporcionais? Justifique sua resposta.

Inversamente proporcionais, pois, aumentando o número de operários, o tempo diminui proporcionalmente.

3 Observe o quadro abaixo e verifique se as grandezas x e y são direta ou inversamente proporcionais. Justifique sua resposta.

Inversamente proporcionais; veja: $8 \cdot 60 = 12 \cdot 40 = 16 \cdot 30$

x	8	12	16
y	60	40	30

4 Uma escavadeira pode cavar 400 m^3 de valas em 6 horas. Em 15 horas de atividade, quantos metros cúbicos de valas poderão ser cavados por essa escavadeira no mesmo ritmo? 1 000 m^3

5 **(Enem)** Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de: alternativa **a**

a) 12 kg c) 24 kg e) 75 kg

b) 16 kg d) 36 kg

6 Um avião de pequeno porte, com velocidade de 560 km/h, cobre a distância Rio-São Paulo em 45 minutos. Em quanto tempo um avião a jato, a uma velocidade de 1120 km/h, percorreria essa distância?

22,5 minutos

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7 Calcule mentalmente:

a) Se 3 canetas custam R$ 6,00, qual é o preço de 6 canetas iguais a essas? R$ 12,00

b) Para encher um aquário com água foram necessárias 12 vasilhas com capacidade de 4 ℓ cada uma. Se forem usadas vasilhas com capacidade de 2 ℓ, quantas serão necessárias para encher o mesmo aquário? 24 vasilhas

c) Um jogador de futebol fez 3 gols em 4 jogos. Quantos gols ele fará em 8 jogos? Não podemos responder, pois as grandezas não são proporcionais.

8 Um antílope corre à velocidade de 24,5 m/s, e um leão, à velocidade de 80 km/h. Qual é o mais rápido desses animais? O antílope, pois a velocidade do leão é 80 km/h, ou seja: $\frac{80\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} \simeq 22{,}22$ m/s

GEORGE TUTUMI

9 Em certa velocidade, um avião consome 400 ℓ de querosene por hora. Calcule o consumo desse avião em uma viagem de 2 horas, 10 minutos e 3 segundos na mesma velocidade. 867 litros

10 Uma lata de tinta é suficiente para pintar 100 dm^2. Quantas latas serão necessárias para pintar uma face de um painel retangular de 3 m por 5 m? 15 latas

11 Em cada área de 4 km^2 de floresta tropical vivem, em média, duas centenas de animais. Quantos quilômetros quadrados de floresta, em média, seriam necessários para acolher 500 animais? 10 km^2

12 Se 15 homens podem fazer um serviço em 40 dias, em quanto tempo o mesmo serviço será feito empregando-se mais 10 homens com o mesmo rendimento dos outros? 24 dias

13 Em um iate, havia alimento suficiente para uma tripulação de 20 homens durante 16 dias. Ao final do sexto dia de viagem, esse iate recolheu 5 náufragos. O alimento restante deverá durar quantos dias? 8 dias

14 Doze marinheiros pintaram o casco de um navio em 4 dias e 4 horas. Quantos marujos, com o mesmo rendimento de trabalho, serão necessários para pintar o mesmo casco em 6 dias e 6 horas? 8 marujos

15 O carro-foguete Bloodhound SSC atinge a velocidade de 1600 km/h. Com essa velocidade constante, em 36 segundos, quantos quilômetros esse veículo se deslocará? 16 km

O carro-foguete Bloodhound SSC é movido à turbina de avião com potência equivalente a 80 mil cavalos.

THE BLOODHOUND PROJECT

16 Uma árvore tem 12 m de altura. Se ela for desenhada na escala 1 : 75, qual será a medida de sua altura no desenho? 16 cm

17 A casa de Cláudia fica a 8 km de seu colégio. Em um mapa de escala 1 : 100 000, qual é a distância, em centímetro, da casa de Cláudia até o colégio? 8 cm

18 Uma estação trata cerca de 30 000 litros de água por segundo. Para evitar riscos de fluorose, a concentração máxima de fluoretos na água não deve exceder cerca de 1,5 miligrama por litro de água. A quantidade máxima aceita de fluoretos, no volume de água tratada em uma hora, nessa estação, é: alternativa **d**

a) 1,5 kg
b) 124 kg
c) 4,5 kg
d) 162 kg
e) 96 kg

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

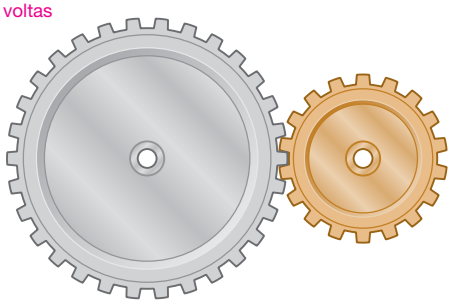
Estação de tratamento de água da Corsan. Santa Maria (RS), 2013.

19 Uma área do tamanho de um campo de futebol (9 000 m^2) é desmatada a cada 6 segundos na região amazônica. Em meia hora, quantos hectares são desmatados? (1 hectare = 10 000 m^2.) 270 hectares

20 Oito homens limparam 480 m^2 de um terreno. Para limpar 600 m^2 de outro terreno, que apresenta o quádruplo da dificuldade do primeiro, serão necessários quantos homens trabalhando no mesmo ritmo que os outros? 40 homens

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

21 Uma máquina tem 2 rodas dentadas que se engrenam. A maior tem 30 dentes, e a menor, 18. Quando a roda maior tiver dado 120 voltas, quantas voltas terá dado a menor?
200 voltas



GEORGE TUTUMI

22 Um pêndulo faz 182 oscilações em 4 minutos e $\frac{1}{3}$ de minuto. Em 18 minutos e 50 segundos, quantas oscilações o pêndulo fará? 791 oscilações

MEDIACOLOR'S/ALAMY/GLOW IMAGES

Pêndulo em oscilação.

23 Se 16 homens gastam 10 dias para montar 32 máquinas, em quantos dias 20 homens, com o mesmo rendimento dos outros, montarão 60 máquinas? 15 dias

24 O motor de um navio consome 200 ℓ de óleo em 5 horas quando gira a 1500 rpm (rotações por minuto). Exigindo do motor 1800 rpm, quantos litros ele consumirá em 3 horas? 144 litros

25 Vinte operários, trabalhando 8 horas por dia, fazem 40 cadeiras. Quantas horas por dia devem trabalhar 30 operários, com o mesmo ritmo dos outros, para construir 15 cadeiras no mesmo número de dias? 2 horas

26 Doze tecelões, trabalhando 8 horas por dia durante 90 dias, fazem 36 m de certo tecido. Quantos dias 15 tecelões, com o mesmo rendimento dos anteriores, levarão para fazer 12 m do mesmo tecido, com o dobro da medida da largura, trabalhando 6 horas por dia? 64 dias

27 Doze operários, trabalhando 8 horas por dia, constroem 20 m de muro em 10 dias. Quantas horas 16 operários devem trabalhar por dia, nas mesmas condições, para concluir, em 6 dias, 13 m do mesmo muro? 6,5 horas

28 Os $\frac{2}{5}$ de uma obra foram executados em 16 dias com 6 horas de trabalho diário. Considerando 8 horas de trabalho diário para a execução do restante da obra, quantos dias serão necessários? 18 dias

29 Um bombardeiro de água usado para apagar incêndios opera durante 5 horas por dia e lança no máximo 36 000 litros de água em 3 dias. Quantas horas por dia a aeronave deveria operar, durante 8 dias, para lançar no máximo 240 000 litros de água? 12,5 horas

OLIVER LABAN-MATTEI/AFP

Incêndio em uma região montanhosa na França, 2000.

30 Junte-se a um colega, leiam e resolvam o problema a seguir.

Se 52 operários gastaram 6 dias para cavar 30 m de um canal, quantos dias serão necessários para que 39 operários, com o mesmo ritmo de trabalho dos outros, cavem 60 m de outro canal? 16 dias

31 Junte-se a um colega, leiam e resolvam o problema a seguir.

(Enem) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de: alternativa **a**

a) 920 kg
b) 800 kg
c) 720 kg
d) 600 kg
e) 570 kg

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 11

PORCENTAGEM E JURO SIMPLES

PALÊ ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

É HORA DE OBSERVAR E DISCUTIR

As feiras livres existem no Brasil desde o período colonial. Elas acontecem ao ar livre, em periodicidade semanal. Oferecem à população produtos básicos e alimentos, em sua maioria, perecíveis. Esse tipo de alimento se deteriora rapidamente; por isso, ao longo do dia, é muito comum os feirantes reduzirem seus preços. Assim, incentivam a compra e reduzem o desperdício dos produtos.

- Em uma barraca de frutas, cada mamão é vendido a R$ 2,00, mas por 3 unidades o consumidor paga R$ 5,00. Nesse caso, o desconto obtido com a compra de 3 mamões é de R$ 1,00. Calcule a porcentagem referente a esse desconto. 16,6%
- Nessa mesma barraca, às 7 horas, 5 maçãs eram vendidas por R$ 5,00 e, às 12 horas do mesmo dia, 5 maçãs custavam R$ 3,00. Determine, em porcentagem, o desconto no preço da maçã obtido por um cliente que deixou de comprar maçãs às 7 horas para comprar às 12 horas. 40%

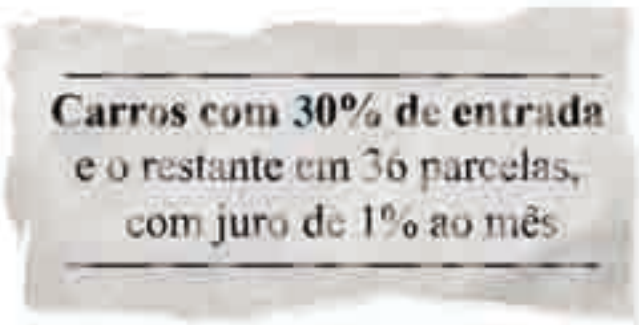
Neste capítulo, vamos trabalhar porcentagem, cálculo de descontos e de acréscimos e juro simples. Os questionamentos propostos na abertura permitem a introdução dos conceitos que serão trabalhados no capítulo.

Frutas em exposição em feira livre. Florianópolis (SC), 2014.

TROCANDO IDEIAS

Faça a atividade no caderno.

Observe algumas situações do dia a dia:



- Pesquise em jornais, em revistas, na internet ou em propagandas de lojas algumas situações em que são utilizados juro e porcentagem. Resposta pessoal.

Neste capítulo, vamos retomar o estudo de porcentagem e iniciar o estudo de juro.

ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Porcentagem

GEORGE TUTUMI

A ideia de porcentagem é representar **partes de um total de 100 partes**. A expressão **por cento** vem do latim *per centum*, que significa "por um cento".

Taxa percentual ou porcentagem

Observe algumas formas de representação e a leitura de algumas taxas percentuais:

- $\frac{7}{100} = 0{,}07 = \mathbf{7\%}$ → Lemos: "sete por cento".
- $\frac{17}{100} = 0{,}17 = \mathbf{17\%}$ → Lemos: "dezessete por cento".
- $\frac{178}{100} = 1{,}78 = \mathbf{178\%}$ → Lemos: "cento e setenta e oito por cento".
- $\frac{235}{100} = 2{,}35 = \mathbf{235\%}$ → Lemos: "duzentos e trinta e cinco por cento".

As expressões 7%, 17%, 178% e 235% são chamadas de **porcentagens** ou **taxas percentuais**. Veja nas situações a seguir algumas aplicações de porcentagem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Situação 1

SILHOUETTE LOVER/SHUTTERSTOCK

Uma raquete de tênis de mesa tem massa total (incluindo a parte de madeira e a parte de borracha) de 120 g. Calcule a massa da parte de madeira dessa raquete, sabendo que ela corresponde a 85% da massa total.

Para determinar a massa da parte de madeira dessa raquete, devemos calcular 85% de 120.

Sabemos que 100% corresponde à massa total, ou seja, 120 g. Assim:

$85\%\text{ de }120 = \frac{85}{100}\text{ de }120 = \frac{85}{100} \cdot 120 = 85 \cdot \frac{120}{100} = 102$

Portanto, a massa da parte de madeira dessa raquete é 102 g.

Situação 2

Um automóvel teve seu preço reduzido em R$ 4 416,00 por uma promoção de final de ano. Essa redução corresponde a 12% do preço inicial do veículo. Determine o preço inicial desse automóvel.

Representando por x o preço inicial do automóvel, temos:

$12\%\text{ de }x = 4\,416$

$\frac{12}{100} \cdot x = 4\,416$

$12x = 441\,600$

$x = 36\,800$

Portanto, o preço inicial desse automóvel era R$ 36 800,00.

Explore o infográfico chamando a atenção dos alunos para os dados apresentados na forma de porcentagem.
Aproveite a oportunidade para falar sobre a importância de uma alimentação saudável.

Situação 3

Hábitos alimentares

Quando inadequados na infância e na adolescência, os hábitos alimentares podem ser fatores de risco para doenças na idade adulta.

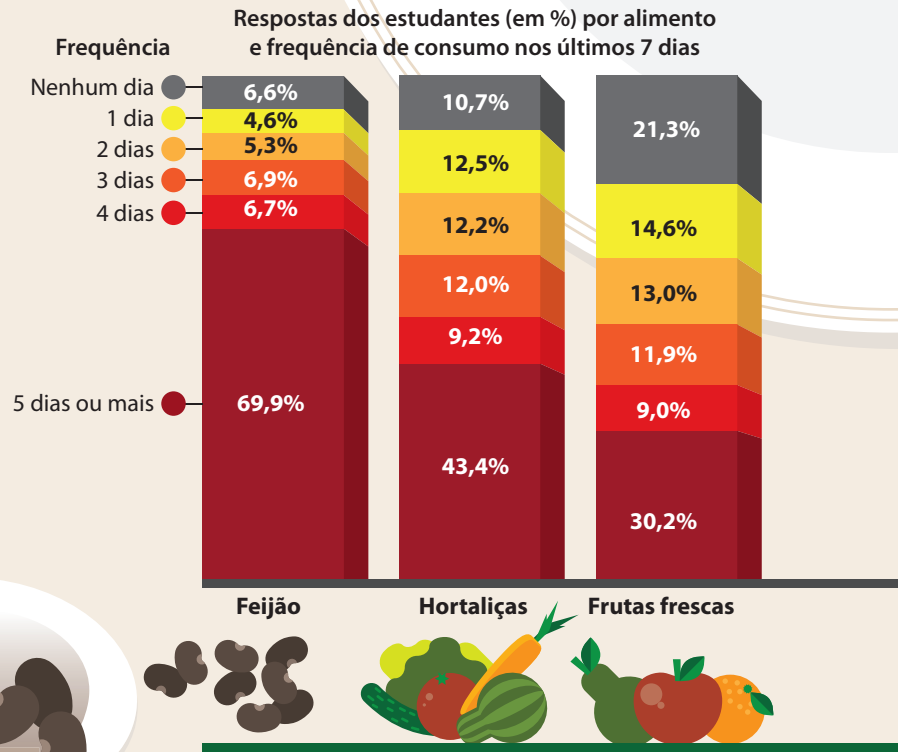
A PeNSE 2012 (Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar) entrevistou mais de 100 mil estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental para conhecer seus hábitos alimentares. O tipo de alimento e a frequência de consumo são indicadores da qualidade da alimentação.

Como foi feita essa pesquisa?

Em 2012, havia no Brasil cerca de 3,1 milhões de estudantes matriculados em escolas públicas e particulares no 9º ano do Ensino Fundamental. Para avaliar seus hábitos, os pesquisadores entrevistaram uma parcela dessa população – 109 104 alunos – de todos os estados brasileiros.

O que come o jovem brasileiro?

O gráfico a seguir apresenta os resultados nacionais da PeNSE 2012.

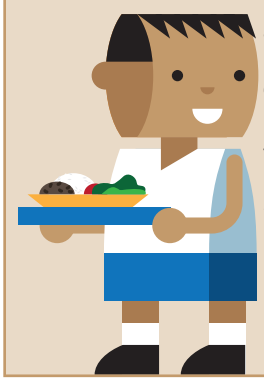


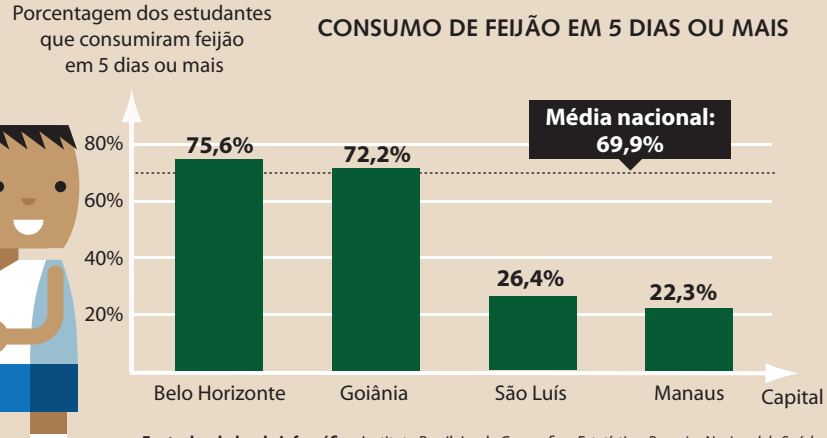
Consumo de feijão

Percentual de estudantes que responderam ter consumido feijão em 5 dias ou mais, nos últimos 7 dias, em algumas capitais brasileiras

Alimentos saudáveis

O consumo de frutas frescas e hortaliças ajuda a prevenir doenças cardiovasculares, diabetes e excesso de gordura. Leite e feijão são outros alimentos saudáveis.





Enquanto em Belo Horizonte 75,6% dos estudantes consumiram feijão pelo menos 5 dias na semana, em Manaus apenas 22,3% tiveram a mesma frequência.

Fonte dos dados do infográfico: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar 2012*. Rio de Janeiro: IBGE, 2013. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/pense/2012/default.shtm>. Acesso em: 7 maio 2015.

MÁRIO KANNO

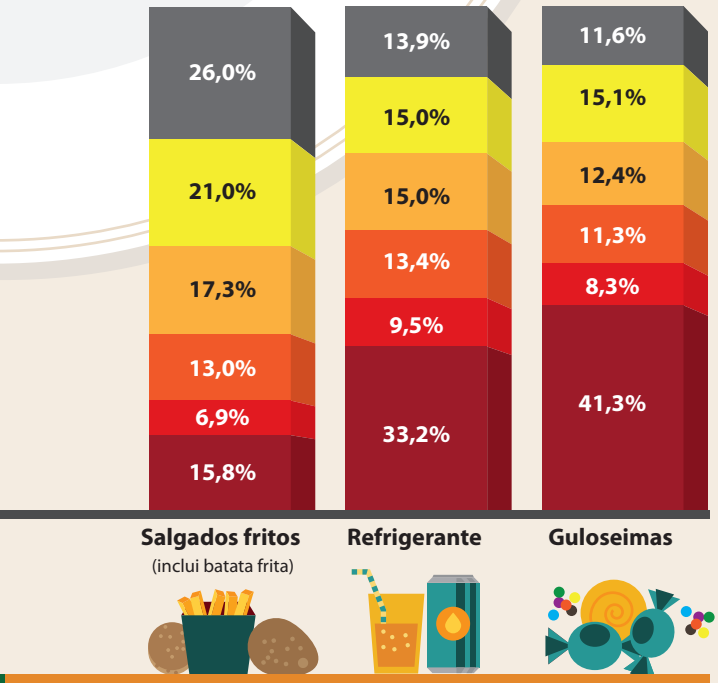
Merenda escolar

88,2% das escolas oferecem comida. No entanto, apenas 16% dos estudantes costumam comer a comida da escola: 18,2% dos meninos e 13,9% das meninas. Veja no gráfico as diferenças regionais.

Consumo da comida da escola por região

Porcentagem de alunos que comem a merenda escolar

Alimentos que os estudantes consomem na escola

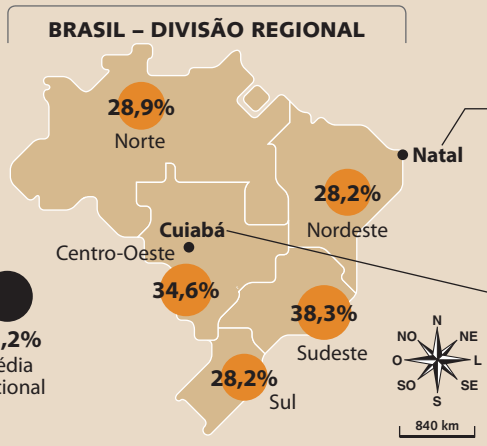


Alimentos não saudáveis

Alimentos ricos em açúcares e sódio, como refrigerantes e guloseimas, e ricos em gorduras, como frituras e embutidos, são fatores de risco para doenças crônicas na idade adulta.

Consumo de refrigerantes

Média percentual de estudantes que responderam ter consumido refrigerante em 5 dias ou mais, nos últimos 7 dias, por região



Entre as capitais, Natal foi a que registrou a menor taxa: apenas 1 em cada 4 estudantes disse ter bebido refrigerante em 5 dias ou mais nos últimos 7 dias. Em Cuiabá, capital com maior consumo da bebida, a taxa foi de 42,7%.

Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira. *Atlas geográfico*: espaço mundial. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2013. p. 119.

Situação 4

De acordo com o infográfico das páginas 214 e 215, dos alunos de Natal entrevistados na PeNSE 2012, 1 em cada 4 estudantes disse ter bebido refrigerante em 5 dias ou mais nos últimos 7 dias. Que porcentagem esses alunos representam em relação ao total de entrevistados em Natal?

Pergunte aos alunos: "Supondo que fossem 1 000 estudantes entrevistados, quantos responderam ter bebido refrigerante em 5 dias ou mais nos últimos 7 dias?" (Resposta: 250 estudantes)

Podemos representar "1 em cada 4 estudantes" pela razão $\frac{1}{4}$.

Agora, usamos proporções para mostrar que as razões $\frac{1}{4}$ e $\frac{25}{100}$ são equivalentes.

$$\frac{1}{4} \overset{\times 25}{=} \frac{25}{100}$$

Portanto, os alunos que beberam refrigerante em 5 dias ou mais nos últimos 7 dias representam $\frac{25}{100}$ ou 25% dos estudantes de Natal entrevistados.

Situação 5

Observe no quadro o número de inscritos e o número de aprovados para os cursos de Direito e de Medicina de certa universidade.

	Direito	Medicina
Inscritos	500	800
Aprovados	60	64

Determine a **taxa percentual** de aprovação em cada um desses cursos.

Indicamos por x e y as taxas percentuais procuradas. Assim, temos:

- Direito: x% de 500 é 60.

$$\frac{x}{100} \cdot 500 = 60$$

$$x \cdot 500 = 60 \cdot 100$$

$$500x = 6\,000$$

$$x = \frac{6\,000}{500} = 12$$

Houve 12% de aprovação para o curso de Direito.

GEORGE TUTUMI

- Medicina: y% de 800 é 64.

$$\frac{y}{100} \cdot 800 = 64$$

$$y \cdot 800 = 64 \cdot 100$$

$$800y = 6\,400$$

$$y = \frac{6\,400}{800} = 8$$

Houve 8% de aprovação para o curso de Medicina.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule:

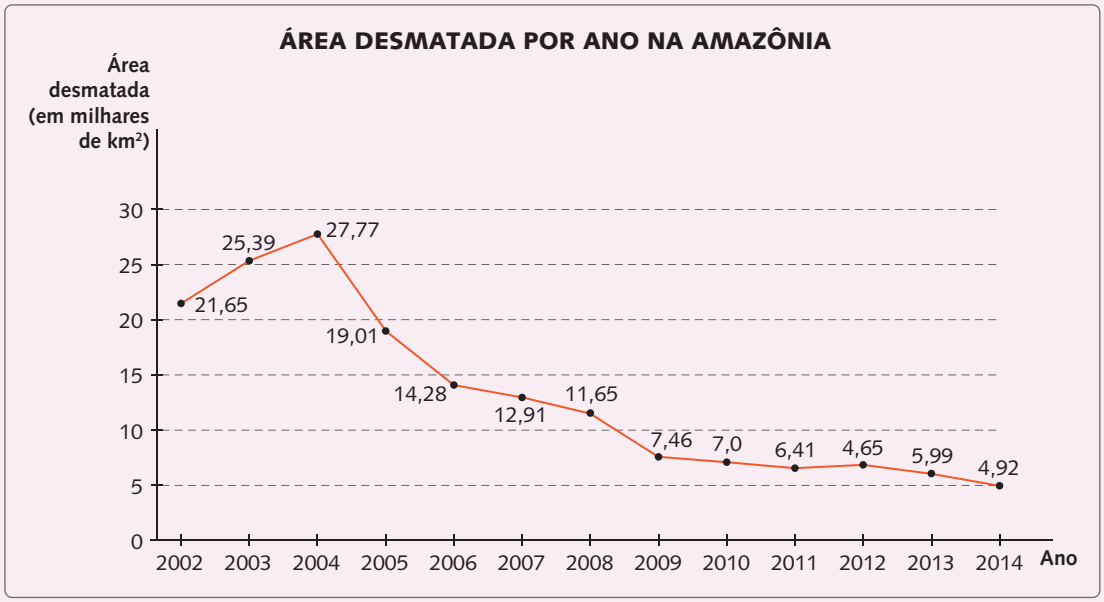
a) 20% de 500 laranjas; 100 laranjas b) 75% de 800 tijolos; 600 tijolos c) 30% de 1800 alunos. 540 alunos

2 Os dois primeiros classificados em um Grande Prêmio de Fórmula 1 conquistam 25 e 18 pontos, respectivamente. A pontuação do terceiro lugar corresponde a 60% do número de pontos do primeiro lugar, e a pontuação do quarto lugar corresponde a 80% do número de pontos do terceiro lugar. Qual é o número de pontos correspondentes ao terceiro e ao quarto lugar?
15 pontos; 12 pontos

MIGUEL SCHINCARIOL/AFP

Piloto Nico Rosberg no autódromo de Interlagos. São Paulo (SP), 2014.

3 Observe o gráfico e responda às questões.



Dados obtidos em: <http://www.obt.inpe.br/prodes/prodes_1988_2014.htm>. Acesso em: 12 maio 2015.

LUIZ RUBIO

a) A área desmatada na Amazônia em 2012 foi de aproximadamente quanto por cento da área desmatada em 2011? 72,5%

b) A área desmatada em 2012 foi aproximadamente quanto por cento da área desmatada em 2004? 16,7%

4 Uma empresa realizou uma promoção oferecendo aos clientes uma quantidade adicional de pó de café em suas embalagens. Essa quantidade foi definida com base em uma porcentagem da quantidade indicada em cada embalagem.

Observe o rótulo das embalagem ao lado e responda: qual dos pacotes oferece maior quantidade adicional de café?
O pacote de 400 g oferece 10 g a mais de café adicional que o pacote de 250 g.

GEORGE TUTUMI

5 Em uma pesquisa, 1900 pessoas disseram preferir o jornal A, o que corresponde a 38% dos entrevistados. Quantos foram os entrevistados? 5 000 entrevistados

6 Aníbal venceu 36 partidas de tênis do total das partidas que disputou. Determine o número de partidas disputadas, sabendo que ele venceu 72% delas. 50 partidas

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

7 Uma família dispõe de R$ 4 800,00 para os gastos mensais. Complete o quadro abaixo, que apresenta parte dos gastos mensais dessa família.

MODELO

Tipo de despesa	Porcentagem da renda mensal	Valor em reais
Alimentação	31,8%	R$ 1 526,40
Energia	4,41%	R$ 211,68
Mensalidade de internet	0,58%	R$ 27,84
Mensalidade de TV por assinatura	0,91%	R$ 43,68
Roupas	3,6%	R$ 172,80
Telefone celular	1,3%	R$ 62,40
Telefone fixo	0,6%	R$ 28,80

8 Um provão tinha 80 questões. Angélica acertou 56 questões. Qual foi a taxa percentual de acertos dessa aluna? 70%

9 O paraquedista austríaco Felix Baumgartner foi o primeiro ser humano a romper a barreira do som sem a ajuda de um veículo motorizado. Ele bateu o recorde mundial de salto em queda livre ao se lançar de uma altura de 39 045 m. O recorde anterior pertencia ao estadunidense Joe Kittinger, que saltou de uma altura de 31 332 m.

LUKE AIKINS/RED BULL STRATOS/DAPD/AP PHOTO/GLOW IMAGES

Felix Baumgartner durante queda livre em 2010.

Responda:

a) Em quantos metros o novo recorde é superior ao anterior? 7 713 m

b) Essa diferença representa, aproximadamente, quanto por cento do salto de Joe Kittinger? 24,62%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Cálculo de acréscimos e descontos

Agora, vamos aprender a calcular acréscimos e descontos com porcentagem.

Acréscimos

Milton tem um comércio cujo aluguel é de R$ 1 500,00. No final do ano, o aluguel sofrerá um acréscimo de 12%. Qual será o novo valor do aluguel?

O acréscimo no valor do aluguel corresponde a:

$$12\% \cdot 1500 = \frac{12}{100} \cdot 1500 = 0{,}12 \cdot 1500 = 180$$

Então, o preço do novo aluguel corresponde a: $1500 + 180 = 1680$

Há, porém, uma forma de calcular diretamente o novo valor do aluguel já com o acréscimo. No exemplo acima, considerando o preço do aluguel atual igual a 100% e o acréscimo do aluguel de 12%, podemos afirmar que o valor do novo aluguel corresponde a 112% (100% + 12%). Assim:

$$112\% \cdot 1500 = \frac{112}{100} \cdot 1500 = 1{,}12 \cdot 1500 = 1680$$

Portanto, o novo valor do aluguel desse ponto comercial é R$ 1 680,00.

Descontos

Um perfume custa R$ 150,00. Na compra do produto à vista, há desconto de 10%. Quanto custa esse perfume à vista?

O desconto nessa compra corresponde a:

$$10\% \cdot 150 = \frac{10}{100} \cdot 150 = 15$$

Então, o preço do produto à vista corresponde a: $150 - 15 = 135$

Nesse caso, para calcular diretamente o preço do perfume já com o desconto, consideramos que o preço original é igual a 100% e que o desconto é de 10%. Podemos afirmar, então, que o preço à vista corresponde a 90% (100% − 10%) do preço original. Assim:

$$90\% \cdot 150 = \frac{90}{100} \cdot 150 = 0{,}90 \cdot 150 = 135$$

Portanto, o perfume custa R$ 135,00 à vista.

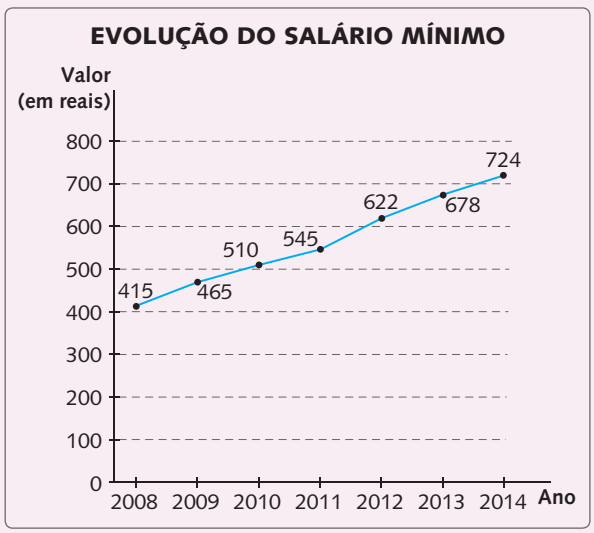
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Um aparelho de som custa R$ 400,00, mas esse valor vai sofrer um acréscimo de 30%. Qual será o novo preço do aparelho de som? R$ 520,00

2 Observe no gráfico a evolução do salário mínimo e responda às questões.



LUIZ RUBIO

Dados obtidos em: <http://www.dieese.org.br/notatecnica/2013/notaTec132SalarioMinimo2014.pdf>. Acesso em: 10 maio 2015.

Qual foi o aumento percentual do salário mínimo:

a) de 2013 em relação a 2012? **a)** aproximadamente 9%

b) entre os anos de 2008 e 2012? **b)** aproximadamente 49,9%

3 O dono de uma loja compra sapatos por R$ 60,00 e os vende com acréscimo de 35%. Qual é o valor do acréscimo? Qual é o preço de venda? R$ 21,00; R$ 81,00

4 O aluguel de uma casa é R$ 1000,00. Nos próximos dois anos esse aluguel sofrerá dois acréscimos, um de 10% e o outro de 8%. Qual será o novo aluguel após esses dois acréscimos? R$ 1 188,00

5 Henrique comprou uma mochila que custava R$ 75,00. Como pagou à vista, teve desconto de 7%. Quanto Henrique pagou pela mochila? R$ 69,75

6 Uma conta de R$ 1500,00 terá desconto de 2% se for paga antes do vencimento. Qual será o valor da conta com desconto? R$ 1 470,00

7 O preço de uma mercadoria é R$ 420,00. Se for paga à vista, haverá desconto de 5%.

a) Qual será o valor do desconto? R$ 21,00

b) Qual será o valor da mercadoria, já incluído o desconto? R$ 399,00

8 Em uma superliquidação, após receber um desconto de 25%, paguei R$ 120,00 por uma máquina de calcular. Qual era o preço da máquina sem o desconto? R$ 160,00

Lendo e aprendendo

Cálculo de desconto ou acréscimo com porcentagem

- Para calcular um desconto de 15% na quantia de R$ 1 200,00 utilizando uma calculadora, fazemos:

Lembre aos alunos que algumas calculadoras não funcionam da maneira exemplificada.

Podemos usar outra operação. Como descontar 15% corresponde a obter 85% do valor total (100% − 15% = 85%), fazemos:

Portanto, com desconto de 15%, a quantia será R$ 1 020,00.

- Um produto custava R$ 90,00 e esse valor sofreu um acréscimo de 20%. Qual é o novo preço desse produto?

Como acrescentar 20% corresponde a obter 120% do valor total (100% + 20% = 120%), podemos fazer:

Portanto, o novo preço do produto é R$ 108,00.

LUIZ RUBIO

3 Juro simples

Paulo tem duas opções para pagar uma moto: em oito parcelas de R$ 980,00 ou R$ 7 000,00 à vista.

GEORGE TUTUMI

- 1ª opção de pagamento (em oito parcelas de R$ 980,00):
  8 vezes a quantia de R$ 980,00 é igual a R$ 7 840,00
- 2ª opção de pagamento (à vista):
  R$ 7 000,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe a diferença de preço entre as duas opções de pagamento:

R$ 7 840,00 − R$ 7 000,00 = R$ 840,00

Essa diferença de preço corresponde ao **juro**, que é uma remuneração cobrada pelo parcelamento da dívida.

Portanto, se Paulo optar pelo pagamento parcelado, pagará R$ 840,00 de juro.

Podemos determinar a porcentagem de juro sobre o preço parcelado determinando a razão entre o juro cobrado e o preço à vista.

$\frac{840}{7\,000} = 0{,}12 = 12\%$

O juro de R$ 840,00 corresponde a 12% do preço à vista.

Podemos calcular a **taxa de juro ao mês** no sistema de juro simples; nesse caso, dividimos 12% por 8 (número de parcelas) e obtemos 1,5%.

Capital e montante

Luciana aplicou R$ 500,00 em uma instituição financeira a uma taxa de juro simples de 1% ao mês. Quanto Luciana terá nessa instituição após um ano?

Em uma aplicação financeira, o valor aplicado é chamado de **capital**. A remuneração a ser recebida por uma aplicação é chamada de **juro** e a soma do capital com o juro é chamado de **montante**.

Na situação acima, o capital é R$ 500,00.

O juro mensal corresponde a 1% de R$ 500,00: $1\% \cdot 500 = \frac{1}{100} \cdot 500 = 5$

Em 12 meses (um ano), o juro dessa aplicação corresponde a:
$12 \cdot 5 = 60$

O montante corresponde a: $\underbrace{500}_{\text{capital}} + \underbrace{60}_{\text{juro}} = 560$

Portanto, Luciana terá R$ 560,00 nessa instituição financeira após um ano.

GEORGE TUTUMI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule o juro simples produzido por um capital de R$ 1200,00, à taxa de 2% ao mês, durante 6 meses. R$ 144,00

2 Que taxa mensal de juro simples faz um capital de R$ 600,00 render R$ 75,00 em 5 meses? 2,5% ao mês

3 Uma aplicação no prazo de 15 meses, a juro simples de 9% ao ano, rendeu R$ 4 230,00. Qual foi o capital aplicado? R$ 37 600,00

4 A que taxa de juro simples esteve empregado o capital de R$ 4 000,00 para render, em 3 anos, R$ 1152,00 de juro simples? 9,6% ao ano

5 Determine o juro simples produzido por R$ 6 000,00, à taxa de 18% ao ano, durante 6 meses. R$ 540,00

6 Determine o juro simples produzido por R$ 5 000,00, à taxa de 1,2% ao mês, durante 2 anos. R$ 1 440,00

Lembre-se:
Não escreva no livro!

7 Um capital de R$ 1000,00 é aplicado a juro simples de 3% ao mês durante seis meses. Qual será o montante final dessa aplicação? R$ 1180,00

8 Determine a taxa mensal a que foi aplicada uma quantia de R$ 4800,00, sabendo que, após 150 dias, houve rendimento de R$ 412,80 de juro simples. 1,72% ao mês

9 Uma loja vende uma TV de LED por R$ 1200,00 à vista, ou em 3 parcelas iguais de R$ 442,00. Qual é a taxa de juro simples mensal que a loja está cobrando? 3,5% ao mês

COBALT/PANTHERSTOCK/GLOW IMAGES

Aparelho de televisão de LED.

Lendo e aprendendo

Economia

Diariamente, em jornais e noticiários de TV, há informações com nomes e siglas relacionados a índices ou taxa de juros. Conheça algumas instituições e siglas comuns:

- **Banco Central (BC ou Bacen)** – instituição responsável pela execução da política financeira do governo. Cuida da emissão de moedas e da fiscalização e do controle de todos os bancos no país.
- **Comitê de Política Monetária (Copom)** – conselho ligado ao Banco Central cuja função é estabelecer as diretrizes da política monetária e definir a taxa de juro básica da economia, que serve de referência para os bancos fixarem suas taxas de juro.
- **Índices econômicos**
  Índice Geral de Preços de Mercado (IGP-M) – o IGP-M/GV é calculado mensalmente pela Fundação Getulio Vargas (FGV).
  Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) – o INPC é calculado mensalmente pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em algumas regiões metropolitanas do país. Orienta os reajustes dos salários dos trabalhadores.
  Índice de Preços ao Consumidor (IPC) – o IPC é calculado mensalmente pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (Fipe) e mede a variação de preços para o consumidor na cidade de São Paulo, com base nos gastos de quem ganha de 1 a 20 salários mínimos.
- **Poupança** – é a aplicação mais simples e tradicional. Possui carência de 30 dias e é isenta de imposto de renda.
- **Ibovespa** – é o mais importante indicador do desempenho do mercado de ações brasileiro, pois retrata o comportamento das principais ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa).

MOREIRA/SAMBAPHOTO

Edifício do Banco Central do Brasil, em Brasília (DF), 2009.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo em equipe

Faça as atividades no caderno.

(Enem) De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,

- 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.
- 33% são utilizados em descarga de banheiro.
- 27% são para cozinhar e beber.
- 15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia.

O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então, economizará diariamente, em média, em litros de água,

a) 30,0.
b) 69,6.
c) 100,4.
d) 130,4.
e) 170,0.

alternativa **c**

Interpretação e identificação dos dados

- Junte-se a três colegas. Analisem as informações do enunciado e anotem aquelas que vocês julgarem relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal.
- Considerando que a média do consumo no Brasil é de 200 ℓ por dia, calculem quantos litros de água são gastos, por dia, para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes. 50 ℓ
- Segundo o quadro de sugestões de consumo moderado, quantos litros de água seriam necessários, por dia, para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes? $24 + 3{,}2 + 2{,}4 = 29{,}6\ \ell$

Plano de resolução

- Considerando a quantidade de água consumida para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes, quanto poderia ser economizado se a população adotasse as sugestões de consumo moderado? $20{,}4\ \ell$
- Calculem os valores apresentados pela ONU com base no gasto médio de água pelo brasileiro e comparem-nos com os valores sugeridos para um consumo moderado.

dar descarga: 33% de 200 ℓ são 66 ℓ; sugestão de redução de consumo: 18 ℓ; economia de $66 - 18 = 48$, ou seja: 48 ℓ

beber e cozinhar: 27% de 200 ℓ são 54 ℓ; sugestão de redução de consumo: 22 ℓ; economia de $54 - 22 = 32$, ou seja: 32 ℓ

Resolução

- Elaborem um plano para a execução do processo de resolução.
- Resolvam o problema individualmente e façam o registro no caderno.

Os alunos devem fazer: $20{,}4 + 48 + 32 = 100{,}4$ litros

Verificação

- Comparem as respostas obtidas.

Apresentação

- Pesquisem informações sobre a crise hídrica e elaborem um cartaz alertando a comunidade escolar sobre a economia e a utilização consciente da água. Para isso, poderão consultar os folhetos disponibilizados pela Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp) no *site* <http://site.sabesp.com.br/site/interna/Default.aspx?secaold=482> (acesso em: 23 maio 2015).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Faça as atividades no caderno.

Revisitando

1 Porcentagem pode ser expressa por uma fração? Explique.

Sim. A ideia da porcentagem é representar partes de um total de 100 partes. Ou seja, o denominador da fração é sempre igual a 100. Por exemplo: $15\% = \frac{15}{100}$

2 Copie no caderno o texto de cada item a seguir, substituindo cada ■ por uma das informações indicadas, de modo a torná-las verdadeiras.

multiplicar	dividir	0,85	1,15	1,6	1,06

a) Uma loja está oferecendo 15% de desconto sobre o preço de todos os produtos. Para encontrar o novo preço, devo ■ o preço antigo por ■. multiplicar; 0,85

b) Na semana passada, o preço dos combustíveis foi reajustado em 6%. Para encontrar o novo preço, devo ■ o preço antigo por ■. multiplicar; 1,06

3 O dono de uma loja de eletrodomésticos decidiu liquidar seu estoque, abaixando os preços das mercadorias em 10%. Porém, como as vendas não atingiram os objetivos esperados, o dono da loja resolveu reajustar os preços dos produtos, aumentando-os em 10% do valor da liquidação. Os preços reajustados coincidem com os preços praticados pelo lojista antes da liquidação? Explique sua resposta.

Não. Imagine que o preço de um produto era de R$ 100,00 antes da liquidação. Na liquidação, esse produto passou a custar R$ 90,00 ($100 \cdot 0{,}9 = 90$). Com o reajuste de 10%, seu novo preço passou a ser $90 \cdot 1{,}1 = 99$, ou seja, R$ 99,00.

Aplicando

1 Escreva as razões na forma de taxa percentual.

a) $\frac{9}{10}$ 90% b) $\frac{11}{20}$ 55% c) $\frac{5}{4}$ 125%

2 Indique a taxa percentual que representa cada quantidade em relação ao total indicado.

a) 18 de 180 10%

b) 400 de 500 80%

c) 12 de 240 5%

d) 85 de 1 000 8,5%

3 Utilizando uma calculadora, determine:

a) 15% de 3 250; 487,5

b) 14,5% de 20 135; 2 919,575

c) 85% de 150 220. 127 687

4 Em cada item, determine o número, sabendo que, do total:

a) 8% é igual a 32; 400

b) 4,5% é igual a 18. 400

5 Determine 0,7% de R$ 4 000,00. R$ 28,00

6 Um caderno custava R$ 15,00 e passou a custar R$ 24,00. Qual foi a taxa percentual de aumento? 60%

7 Após um aumento de 20%, um livro passou a custar R$ 18,00. Qual era seu preço antes do aumento? R$ 15,00

8 Economizei R$ 40,00 ao obter um desconto de 8% na compra de um terno. Qual era o preço do terno? R$ 500,00

9 No mês de janeiro, Mário atingiu a marca de 2,05 m no salto em altura. Nos meses seguintes, sua melhor marca foi 10% inferior à obtida em janeiro. Qual é a marca mais recente que esse atleta obteve? 1,845 m

10 Ana tem R$ 60,00. Sabe-se que 40% dessa quantia corresponde a 30% do que tem sua irmã. Quantos reais tem a irmã de Ana? R$ 80,00

11 Gustavo comprou uma passagem aérea por R$ 350,00. No dia seguinte, na mesma companhia aérea, o preço da passagem sofreu acréscimo de 22%. Qual passou a ser o preço da passagem aérea? R$ 427,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

12 Após um mês de treinamento, Júlio aumentou em 15% a massa dos halteres. Sabendo que a massa no início do treinamento era 110 kg, determine a nova massa. 126,5 kg

GEORGE TUTUMI

13 Os açudes Castanhão e Orós, ambos no leito do rio Jaguaribe, no Ceará, têm, respectivamente, capacidade de 6,7 bilhões e 2,1 bilhões de metros cúbicos de água.

LUIZ CARLOS MURAUSKAS/FOLHAPRESS

Açude Castanhão, em Alto Santo (CE), 2002.

OLGA LEIRIA/OLHAR IMAGES

Açude Orós, em Orós (CE), 2014.

a) A capacidade do açude Orós corresponde a quanto por cento da capacidade do açude do Castanhão? 31,34%

b) Podemos afirmar que a capacidade do açude Orós é inferior a $\frac{1}{3}$ da capacidade do açude Castanhão? Sim, pois é inferior a 33,33%.

14 **(Enem)** Um grupo de pacientes com hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de: alternativa **b**

a) 16%
b) 24%
c) 32%
d) 48%
e) 64%

15 Uma corrida de 10 600 m será realizada em duas etapas. Na primeira etapa, serão percorridos 3 710 m. Qual é o percentual da corrida correspondente à segunda etapa? 65%

GEORGE TUTUMI

16 Uma pessoa tomou emprestado de um banco a quantia de R$ 3 000,00, à taxa de 2,8% ao mês. Após um ano, quanto essa pessoa terá de devolver ao banco, supondo que este trabalhe no regime de juro simples? R$ 4 008,00

17 Quanto renderá uma aplicação de R$ 2 500,00, durante 1 ano e 4 meses, à taxa de 3,6% ao mês, em regime de juro simples? Qual será o montante (capital inicial + juro) ao final do período de aplicação? R$ 1 440,00; R$ 3 940,00

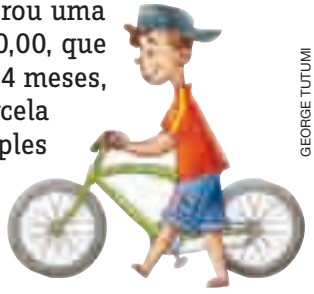
18 A quantia de R$ 500,00, aplicada durante 3 meses, rendeu juro simples de R$ 10,50. Qual foi a taxa mensal da aplicação? 0,7%

19 Um capital de R$ 80 000,00 é aplicado à taxa de 1% ao mês. Quanto esse valor renderá de juro simples após 3 meses? R$ 2 400,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lembre-se:
Não escreva no livro!

20 Uma pessoa comprou uma bicicleta de R$ 400,00, que será paga daqui a 4 meses, em uma única parcela à taxa de juro simples mensal de 5%. Qual será o valor pago pela bicicleta?



GEORGE TUTUMI

R$ 480,00

21 Que capital, aplicado à taxa de 0,8% ao mês, durante 7 meses, produz juro simples de R$ 560,00? R$ 10000,00

22 **(Enem)** Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dℓ
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dℓ e menor ou igual a 100 mg/dℓ
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dℓ e menor ou igual a 125 mg/dℓ
Diabetes melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dℓ e menor ou igual a 250 mg/dℓ
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dℓ

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dℓ. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de: alternativa **d**

a) hipoglicemia.
b) normal.
c) pré-diabetes.
d) diabetes melito.
e) hiperglicemia.

23 Durante quantos meses um capital de R$ 20 000,00 deve ser aplicado a 4% ao mês para render R$ 2 400,00 de juro simples? 3 meses

24 Para que R$ 9 600,00 rendam R$ 172,80 em 3 meses, qual deve ser a taxa mensal de juro simples da aplicação? E qual deve ser a taxa anual? 0,6%; 7,2%

25 **(Enem)** Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de:

a) R$ 4 222,22
b) R$ 4 523,80
c) R$ 5 000,00
d) R$ 13 300,00
e) R$ 17 100,00

alternativa **c**

26 **(Enem)** Uma empresa possui um sistema de controle de qualidade que classifica o seu desempenho financeiro anual, tendo como base o do ano anterior. Os conceitos são: insuficiente, quando o crescimento é menor que 1%; regular, quando o crescimento é maior ou igual a 1% e menor que 5%; bom, quando o crescimento é maior ou igual a 5% e menor que 10%; ótimo, quando é maior ou igual a 10% e menor que 20%; e excelente, quando é maior ou igual a 20%.

Essa empresa apresentou lucro de R$ 132 000,00 em 2008 e de R$ 145 000,00 em 2009.

De acordo com esse sistema de controle de qualidade, o desempenho financeiro dessa empresa no ano de 2009 deve ser considerado: alternativa **c**

a) insuficiente.
b) regular.
c) bom.
d) ótimo.
e) excelente.

DESAFIO

Após receber dois aumentos sucessivos de 15% e 18%, Bete passou a receber um salário de R$ 1628,40. Qual era o salário de Bete antes dos aumentos? R$ 1 200,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

28. Informe aos alunos que, segundo o IBGE, a população economicamente ativa compreende o potencial de mão de obra com que pode contar o setor produtivo, isto é, a **população ocupada** e a **população desocupada**, assim definidas:
população ocupada – formada pelas pessoas que, em um determinado período de referência, trabalharam ou tinham trabalho mas não trabalharam (por exemplo, pessoas em férias);

Lembre-se:
Não escreva no livro!

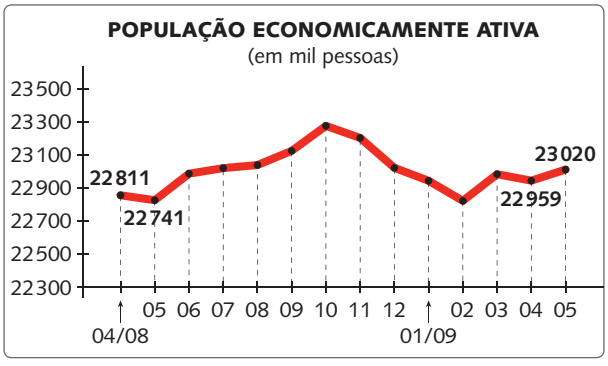
27 **(Enem)**

> Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodiesel ao óleo diesel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodiesel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodiesel, bem como possibilita a redução da importação de diesel de petróleo.
>
> Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodiesel ao diesel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodiesel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final diesel/biodiesel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodiesel com a adição de 3%? alternativa **d**

a) 27,75 milhões de litros.
b) 37,00 milhões de litros.
c) 231,25 milhões de litros.
d) 693,75 milhões de litros.
e) 888,00 milhões de litros.

28 **(Enem)** O gráfico a seguir mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis regiões metropolitanas pesquisadas.



Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Mensal de Emprego. Disponível em: <www.ibge.gov.br>.

Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4%, então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a: alternativa **d**

a) 23 940
b) 32 228
c) 920 800
d) 23 940 800
e) 32 228 000

29 Em uma reserva ecológica há 100 diamantes-de-gould:

- 70% têm a cabeça vermelha (tipo V);
- 30% têm a cabeça laranja (tipo L);
- 40% dos pássaros tipo V têm a parte frontal superior lilás;
- 30% dos pássaros tipo L têm a parte frontal superior lilás.

Quantos desses diamantes-de-gould têm a parte frontal superior lilás? 37

GERARD LACZ/ANKA AGENCY/GLOW IMAGES

Diamante-de-gould é um pássaro muito colorido, originário da Austrália.

DESAFIO

(Enem) João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado. alternativa **e**

A opção que dá a João o menor gasto seria:

a) renegociar suas dívidas com o banco.
b) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
c) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
d) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.
e) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

população desocupada – formada pelas pessoas que não tinham trabalho, em um determinado período de referência, mas estavam dispostas a trabalhar, e que, para isso, tomaram alguma providência efetiva (consultando pessoas, jornais etc.).
Dados obtidos em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/trabalhoerendimento/pme/pmemet2.shtm>. Acesso em: 19 mar. 2015.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RESPOSTAS

Capítulo 1

Página 15

1 a) mais sete
b) mais quatro
c) menos doze
d) menos cem

2 a) +15
b) −30
c) −40
d) +50

3 a) 7, 4, 18, 76, 25
b) −3, −9, −36
c) Não é positivo nem negativo.

4 a) −R$ 3000,00
b) +R$ 1200,00
c) +2300 m
d) −500 m

5 13 andares

6 16, 14, 5, 0, −3

8 a) fevereiro
b) 35 mil reais
c) lucro; 45 mil reais

9 6 °C

Página 17

1 a) −1
b) ponto *A*
c) ponto *D*
d) ponto *C*
e) +6

4 −4

5 5 °C

Página 19

1 a) +6
b) −100
c) +7
d) −8

2 a) 13
b) 50
c) 21
d) 116

3 a) 16
b) 20
c) 35
d) 1

4 a) 13
b) +318
c) +17 e −17

5 a) nenhum
b) Um número, o próprio zero.
c) infinitos

Página 21

1 a) 7 b) −6 c) −3

2 7 > 6 > 3 > 0 > −1 > −4 > −8

3 a) >
b) >
c) <
d) >
e) >
f) <
g) >
h) >

4 a) −10
b) −13
c) 0, −1 e −2
d) −12

5 a) Tales de Mileto
b) 44 anos

6 a) −51
b) −100

Página 24

1 a) +8
b) −17
c) −8
d) −15
e) −27
f) −25
g) −7
h) +59

2 negativo; −R$ 400,00

3 6500 m

4 a) R$ 2491,00 b) positivo

5 a) elemento neutro
b) comutativa
c) elemento oposto
d) associativa

6 a) não b) Ilda c) 31

Página 28

1 a) −15
b) −18
c) −100
d) −102
e) −10
f) −20
g) +95
h) −57

2 a) −950
b) 0
c) −2580
d) +2400

3 a) −2
b) −6
c) −19
d) 0
e) +9

4 a) +37
b) +17
c) −68
d) +17

5 a) +12
b) −10
c) +119

6 23 °C

7 40 bilhões de dólares (saldo positivo)

Página 30

1 a) +33
b) +5
c) −63
d) 0
e) −77
f) −276
g) +96
h) −300

2 a) +168
b) +88
c) −42
d) +2772
e) +1440
f) −180

3 +24

4 Não, porque, ao multiplicar (−1) por qualquer número inteiro não nulo, o produto será o oposto desse número.

5 −36

6 −16, −8, 0, 8, 16

7 a) associativa
b) comutativa
c) elemento neutro
d) distributiva

8 a) 39
b) −35
c) −4
d) −20

9 1 · 12; 12 · 1; 2 · 6; 6 · 2;
(−1) · (−12); (−12) · (−1); (−2) · (−6);
(−6) · (−2); (−3) · (−4); (−4) · (−3)

10 2947

11 a) −30
b) +295
c) −22

Página 32

1 a) +2
b) −2
c) +8
d) −5
e) +16
f) −1
g) +2
h) 0

2 a) +3
b) −10
c) +32
d) −27

3 a) positivo
b) positivo
c) negativo

4 a) −17
b) +9
c) +3

5 a) −40
b) 5
c) 0
d) 20

6 a) −44
b) 0
c) −29
d) −6

7 a) 1 b) −1

Página 35

1 a) +8
b) +2401
c) −729
d) +9
e) +1
f) +121
g) −35
h) −1
i) 1

2 a) positivo
b) Positivo, se o expoente for par, e negativo, se o expoente for ímpar.

3 a) $(-6)^4$
b) $(+9)^8$
c) $(+7)^8$
d) $(-1)^3$
e) $(+3)^2$
f) $(-3)^8$

4 +1

5 a) 9 b) 0

6 alternativas **a** e **c**

7 bisavós: $2^3 = 8$;
trisavós: $2^4 = 16$

8 9^{10}

9 a) −26
b) 13
c) +1

10 a) 64; 34
b) −8; −56
• não

11 a) 15
b) Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Página 38

1 **a)** 9 **b)** −30 **c)** 8 **d)** 0 **e)** −14 **f)** −10

2 **a)** 19 **b)** 7 **c)** −9 **d)** 25

3 **a)** 208 **b)** −6

4 8 m

5 16

6 8

7 **a)** 5; 7 **b)** 8; 4
- não

Página 40 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 20 h 30 min

2 $A = -3195$ m; $B = -825$ m; $C = +2340$ m; $D = +5895$ m

4 R$ 120,00

5 1200 m

6 **a)** −3 **b)** +6 **c)** +4 **d)** −1

7 **a)** 27 °C **b)** −8 **c)** −16 **d)** zero **e)** −6, −5, −4 **f)** −1 **g)** +1

8 20 segundos

10 33 anos

11 (26 + 20 − 10 + 30 − 15 + 40 − 20); 71 atmosferas

14 **a)** +18 **b)** −5 **c)** −1

15 **a)** −160 **b)** +22 **c)** −12 **d)** +25

16 **a)** −2 **b)** −44 **c)** 10 **d)** 144 **e)** 129

18 −11

19 **a)** 11 **b)** 10 **c)** 10

20 **a)** 18
b) Dados amarelo e vermelho com 6 e 2 ou 5 e 1 pontos, respectivamente.
c) 35

21 alternativa **a**

22 alternativa **c**

Capítulo 2

Página 48

1 alternativas **a**, **d**, **e** e **g**

2 **a)** −0,25 **b)** 1,4 **c)** 0,07 **d)** 0,6 **e)** −0,125 **f)** −0,625 **g)** 0,135 **h)** −1,8

3 Exemplo de respostas:
a) $+\frac{64}{10} = +\frac{32}{5}$
b) $-\frac{225}{100} = -\frac{9}{4}$
c) $-\frac{8}{100} = -\frac{2}{25}$
d) $+\frac{54}{100} = +\frac{27}{50}$

4 **a)** 7
b) infinitos
c) entre 3 e 4
d) entre −6 e −5

5 **a)** $\frac{3}{7}$ **b)** $-\frac{1}{5}$ **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{7}{3}$ **f)** −5 **g)** −2 **h)** $\frac{5}{4}$

6. **a)** $\frac{4}{5}$ **b)** $-\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{17}{2}$ **d)** $-\frac{7}{5}$ **e)** $\frac{171}{25}$ **f)** $-\frac{69}{20}$

Página 50

1 **a)** $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$ **b)** ponto *B*; ponto *A* **c)** ponto *C*

Página 51

1 **a)** $-\frac{3}{8}$ **b)** $-\frac{13}{9}$ **c)** $-\frac{7}{4}$ **d)** $\frac{1}{7}$

2 **a)** $\frac{5}{19}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{200}$ **d)** 0,05

3 **a)** $-\frac{4}{7}$ ou $+\frac{4}{7}$
b) $-\frac{7}{9}$ ou $+\frac{7}{9}$
c) −0,3 ou +0,3
d) −0,75 ou +0,75

Página 52

1 $-\frac{5}{3} < -\frac{2}{8} < +\frac{3}{5} < 1 < +\frac{10}{5}$

2 $+3 > +\frac{4}{5} > 0 > -\frac{1}{5} > -\frac{9}{4}$

3 **a)** −3,2 **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** 0 **d)** −0,5

Página 55

1 **a)** $-\frac{5}{12}$ **b)** $-\frac{19}{21}$ **c)** $-\frac{4}{21}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** $-\frac{27}{40}$ **f)** $-\frac{23}{4}$

2 **a)** 9,52 **b)** −5,59 **c)** −2,63 **d)** −4,44

3 **a)** $\frac{16}{21}$
b) $\frac{31}{24}$
c) 0,95
d) $\frac{1}{6}$
e) −0,375
f) $-\frac{58}{35}$

4 **a)** $\frac{28}{15}$ **b)** 2,5

5 7,9

6 −180 m

7 17,3 °C

8 R$ 160,85

9 R$ 1890,00

Página 57

1 **a)** −17,28 **b)** 2,7

2 **a)** −9,24 **b)** −0,7 **c)** 86,602 **d)** 9,7695

3 **a)** $\frac{7}{5}$ **b)** $-\frac{64}{729}$ **c)** $-\frac{5}{6}$ **d)** 0 **e)** −3

4 12,18 m²

5 **a)** −75 **b)** −204 **c)** 0,003 **d)** $-\frac{7}{20}$

6 O produto desses números é igual a 1.

7 $-\frac{41}{360}$

8 R$ 4752,00

9 R$ 6220,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10 a) • 1 • 1 • 1
b) $\left(-\frac{5}{6}\right)$
d) $\frac{b}{a}$

Página 60

1 a) −18,4 b) 5
2 a) −400 c) 12,56
b) −4,5 d) −50,4
3 a) $-\frac{49}{6}$ c) $-\frac{5}{16}$ e) −6
b) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{128}{3}$
4 40 lotes

Página 62

1 a) $\frac{1}{81}$ e) $\frac{1}{16}$
b) 0,008 f) 1,44
c) 0,0001 g) −0,5
d) 1 h) $-\frac{1}{216}$
2 a) 1 b) $\frac{15}{8}$
3 a) $\left(\frac{7}{13}\right)^4$ d) $(-0{,}5)^{12}$
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{14}$ e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$
c) $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ f) $(0{,}222\ldots)^0$
4 a) 2^5 b) 2^{20}
5 2662 indivíduos

Página 64

1 a) $\frac{10}{3}$ c) −0,1 e) 2,5
b) $-\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{5}$
f) Essa raiz quadrada não está definida no conjunto dos números racionais.
g) $-\frac{1}{12}$ h) 0,8
2 a) $-\frac{122}{45}$ c) $\frac{1}{2}$
b) 0
3 alternativas **c** e **e**
4 a) 4,8 m² c) $\sqrt{40}$
b) $\frac{25}{36}$ m² d) 1,2
5 aproximadamente 4,9 m

Página 65

1 a) $-\frac{27}{20}$ c) −6 e) $-\frac{1}{3}$
b) $\frac{23}{27}$ d) −30 f) $-\frac{3}{40}$
2 a) $\frac{55}{28}$
b) −20
3 a) $\frac{5}{2}$
b) $-\frac{1}{18}$
c) $\frac{61}{8}$
4 a) $(-7)^{22}$
b) $(-0{,}03)^3$

Página 66 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 a) $+\frac{34}{5}$ c) $-\frac{1}{50}$
b) $-\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{100}$
3 a) $\frac{37}{40}$ c) $\frac{118}{25}$
b) 1,6 d) −7
4 a) ponto *C* c) 1,5
b) −2,5 d) ponto *D*
5 desceu; 6,9 m
6 Sim; considerando que ■ representa um número racional, temos:
$\blacksquare : \frac{125}{1000} = \blacksquare \cdot \frac{1000^{8}}{125_{1}} = \blacksquare \cdot 8$
7 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8}$
8 Mário; 75%
9 a) $\frac{9}{25}$
b) $\frac{1}{625}$
c) −0,008
d) 0,000001
10 9,48
11 $-\frac{3}{8}$
12 5,5 cm
13 a) −0,8 b) $-\frac{7}{15}$
14 alternativa **e**
15 $\left(-\frac{1}{3}\right)^{13}$
16 113,6 m
17 alternativa **c**
18 alternativa **e**
19 alternativa **a**
20 alternativa **e**
21 alternativa **b**
22 1,905 cm
23 0,00005
25 alternativa **a**

Capítulo 3

Página 74

1 Representando o número desconhecido por *x*, temos:
a) $3x$ e) $\frac{2x}{5}$
b) $5x$ f) $x - \frac{x}{3}$
c) $\frac{x}{2}$ g) $2x + \frac{x}{2}$
d) $\frac{x}{4}$ h) $x + (x + 1) + (x + 2)$
2 $3y - x$
3 ab
4 área do terreno: $x \cdot y$
área da casa: a^2
área da piscina: $b \cdot c$
área do gramado: $x \cdot y - (a^2 + b \cdot c)$

Página 75

2 a) 16
b) $-\frac{3}{100}$ ou −0,03
c) −16
3 a) R$ 3,40
b) $y = 3{,}4 \cdot x$
c) R$ 51,00
4 a) $(10 + n)$; 110 b) 1999

Página 78

1 a) 15; ab e) $\frac{17}{4}$; cd
b) 47; xy f) −1; y
c) $-\frac{3}{2}$; a^2b g) $-\frac{3}{5}$; x
d) −15; xy^3k^4 h) 7; c
2 alternativas **b** e **d**
3 a) $17x$ e) $-4k$
b) $4ab - 5$ f) $21y$
c) $-2a + 2b$ g) $-16x$
d) $-\frac{17}{20}y$ h) $7y - 2z + 4w$
4 xyz; 50 600 cm³
5 perímetro: $2 \cdot (a + b + x)$;
área: $(a + b) \cdot x$

Página 79

1 a) $2 \cdot b = 16$
b) $x - y = 15$
2 a) Oito mais três é igual a onze.
b) Vinte dividido por cinco menos dois é igual a dois.
c) O quadrado de cinco menos sete é menor que oito.
d) Dois terços é maior que um quarto.
3 alternativas **c** e **d**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Página 80 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** $7 + 4x$ **e)** $x + \frac{3x}{5}$

b) $\frac{x}{6}$ **f)** $3x - \frac{x}{2}$

c) $\frac{x}{10}$ **g)** $\frac{x + x + 1}{2}$

d) $x \cdot \frac{x}{7}$ **h)** $5 \cdot \left(x + \frac{3}{4}x\right)$

2 alternativas **a**, **b**, **c** e **d**

3 $32 - x$

Desafio: $(a - 2e) \cdot (b - 2e) \cdot (h - 2e)$

4 **a)** $\frac{5n}{2} + 12$

b) 87

5 **a)** $C = 2000 + 1{,}20x$

b) R$ 14 000,00; R$ 1,40

Desafio: $a \cdot b + \frac{ah}{2} - x^2 - xy$

6 $x \cdot (y + 3)$

7 $x^2 - y^2$

8 alternativa **e**

9 **a)** $4x - 6y$

b) $7ab + 4a - 8b$

c) $x - 0{,}9y$

d) $9a - 10b$

Capítulo 4

Página 86

1 alternativas **c** e **e**

2 alternativas **a**, **b** e **d**

3 **a)** $2y - 6$

b) $4 + y$

c) y

Página 88

1 **a)** sim **c)** não

b) não **d)** sim

2 **a)** não tem solução

b) 5

3 **a)** 8 **e)** 1

b) 12 **f)** -8

c) -3 **g)** $-\frac{1}{4}$

d) $-\frac{3}{4}$ **h)** -1

4 **a)** $x = 7$

b) $a = -3$

c) $x = +8$ ou $x = -8$

d) $y = -3$

e) $b = -20$

f) $x = -\frac{3}{2}$

Página 90

1 alternativas **b** e **c**

2 **a)** $x = 16$ **f)** $x = 100$

b) $y = -103$ **g)** $x = -\frac{5}{6}$

c) $x = -7$ **h)** $x = -\frac{15}{2}$

d) $x = 13$ **i)** $x = -24$

e) $y = -\frac{5}{3}$ **j)** $\frac{20}{3}$

3 **a)** 1 **d)** 5

b) 4 **e)** 5

c) 1 **f)** 4

• são equivalentes **a** e **c**, **b** e **f** e **d** e **e**.

4 0,05 quilograma

Página 92

1 **a)** $x = 6$ **f)** $m = -6$

b) $x = -2$ **g)** $x = 7$

c) $y = -\frac{7}{2}$ **h)** $x = 5$

d) $x = 20$ **i)** $x = -1$

e) $x = 0$

2 **a)** $x = 4$

b) $x = -9$

c) $x = -2$

d) Não tem solução em $\mathbb{Z}$.

e) Não tem solução em $\mathbb{Z}$.

f) $x = 6$

3 **a)** $x = -\frac{1}{4}$ **c)** $y = -72$

b) $m = 1$ **d)** $y = \frac{1}{2}$

4 **a)** $x = 12$ **e)** $y = 9$

b) $x = -\frac{7}{2}$ **f)** $x = 11$

c) $y = -1$ **g)** $x = 6$

d) $y = \frac{5}{2}$

5 $x = \frac{33}{10}$ e $y = -2$; logo, x é maior que y.

Página 95

1 24

2 8

3 48

4 60

5 20 anos

6 Lúcio: 70 kg; Cândido: 54 kg

7 68 e 70

8 36

9 36, 37, 38 e 39

10 40 e 63

11 32

12 220 figurinhas

13 R$ 60,00

14 primeiro: R$ 15 000,00;
segundo: R$ 10 000,00;
terceiro: R$ 5 000,00

15 216 pares de tênis

16 41 anos

17 16

18 33 cm

19 20 anos

20 $x = 100$ m

21 $x = 9$

22 **a)** 10 **c)** 20

b) 15 **d)** 25

• 50 • $5n$

23 quarto: 9 m²; banheiro: 3 m²; *hall*: 1,5 m²; cozinha: 6,75 m²; varanda: 6,75 m²; sala: 13,5 m²

Página 99 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

1 **a)** $x = \frac{5}{4}$ **c)** $y = 2$

b) $x = 1$ **d)** $x = \frac{31}{6}$

2 **a)** Não há solução.

b) $\frac{10}{27}$

3 $m = \frac{10}{3}$

4 **a)** $x = 3$ **d)** $x = \frac{5}{16}$

b) $x = \frac{2}{3}$ **e)** $x = -\frac{51}{8}$

c) $x = \frac{1}{3}$ **f)** $x = 1$

5 R$ 300,00

6 **a)** 13 **d)** 12

b) $\frac{25}{12}$ **e)** 48

c) 4 **f)** 2

7 15 anos

8 pai: 54 anos; filho: 18 anos

9 6 meninos

10 R$ 3 600,00

11 35, 40 e 45

12 50 homens e 30 mulheres

13 30 tábuas

Desafio: 289

14 $[(x + 8) \cdot 3 - 4 + x] : 4 + 2 - x =$
$= [3x + 24 - 4 + x] : 4 + 2 - x =$
$= [4x + 20] : 4 + 2 - x =$
$= x + 5 + 2 - x = 7$

15 48 bananas, 12 laranjas e 36 peras

16 25 bolas brancas

17 primeira categoria: 500 cc; segunda categoria: 250 cc; terceira categoria: 125 cc

18 31,25 km

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

19 375 rapazes e 150 moças
20 25 viaturas de quatro rodas e 15 de seis rodas
21 pai: 35 anos; filho: 10 anos
Desafio: 9 horas e 20 minutos
22 João: 33 anos; Pedro: 12 anos
23 moto aquática: 180 kg; lancha: 240 kg
24 36 alunos
25 12 e 72
26 24
27 17 galinhas e 4 carneiros
28 16 de R$ 5,00 e 19 de R$ 10,00
29 pai: 30 anos; filho: 10 anos
Desafio: 217
30 9 anos
31 65 km
32 12
33 7 anos
34 20 anos
35 25
36 720 litros
37 32 saques
38 R$ 720,00
39 alternativa **b**
40 1856
41 frango: R$ 10,00; peru: R$ 25,00
42 Justificativa: $(x \cdot 3 + 1) \cdot 3 + x = 9 \cdot x + 3 + x = 10 \cdot x + 3$
43 20 m²
Desafio: 23 °F

Capítulo 5

Página 110

1 **a)** primeiro membro: $2x - 3$; segundo membro: 8
b) primeiro membro: $-3x$; segundo membro: $2x + 4$
c) primeiro membro: $\frac{x}{2} - 5$; segundo membro: $\frac{2}{5}$
2 alternativas **b**, **d**, **e** e **f**
3 **a)** $2x + 5 < 8$
b) $x - \frac{x}{5} \leq 4$
c) $5x - \frac{x}{3} < 2$
d) $3x - \frac{x}{4} \geq 7$
4 $x - 5 < \frac{x}{2}$
5 alternativas **b**, **d**, **f** e **h**
6 **a)** $x > 5$
b) $x + 100 > 105$

Página 114

1 Sim, pois ao diminuir 10 unidades de cada membro da inequação obtemos uma sentença equivalente à primeira.
2 **a)** $-28 < 20x$
b) $7 > -5x$
c) $-10 < 5x - 3$
d) $-5 < 5x + 2$
3 alternativas **a**, **b**, **d** e **f**
4 $10x > 12$

Página 115

1 **a)** $x \leq -\frac{8}{3}$
b) $x > 1$
c) $x \leq 3$
d) $x > -\frac{3}{2}$
2 $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$
3 9
4 -2
5 9 cm

Página 116 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando
1 -1
2 16
3 -7
4 não tem solução em U
5 $x \leq -5$
6 Sim; subtraindo 5 unidades de cada membro, de acordo com o princípio aditivo.
Desafio: 6 cm, 7 cm e 8 cm
7 84 ovos de tartaruga
8 Sim; multiplicando por -1 os dois membros, de acordo com o princípio multiplicativo
9 $-2, -1, 0, 1, 2$
10 zero
11 **a)** $-5, -3, 0, 5, 6$
b) 5, 6
12 **a)** $x \leq -\frac{3}{23}$
b) $x < \frac{15}{2}$
13 cinco meses
14 alternativa **c**
15 alternativas **b**, **c** e **d**
16 **a)** $3x + 5 < 10$
b) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x < x$
c) $x + \frac{x}{10} > 5$
d) $5x - 10 > 0$
17 U
18 alternativa **d**
19 sim, pois: $x < 17$
Desafio: 27

Capítulo 6

Página 122

1 **a)** $\widehat{AOB}$, O, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$
b) $\widehat{RST}$, S, $\overrightarrow{SR}$ e $\overrightarrow{ST}$
c) $\widehat{ABC}$, B, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$
d) $\widehat{PQR}$, Q, $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QR}$
2 **a)** sim
b) sim
c) Os lados do ângulo raso não são coincidentes; já os lados do ângulo nulo são.

Página 127

1 **a)** 60°
b) 90°
c) 102° 35'
d) 110° 32' 48"
2 r e v, u e s, u e t
3 **a)** 30°
b) 50°
c) 20°
d) 70°
e) 90°
f) 110°
g) 60°
h) 160°
4 **a)** 40°
b) 30°
c) 45°
d) 100°
e) 135°
f) 110°
5 **a)** 30°
b) 165°
c) 195°
6 **a)** agudo
b) obtuso
c) reto
d) raso
8 50°; agudo
9 alternativa **d**
10 40°
13 100,8° = 100°48'
14 **a)** 90°; 45°; 45°; 45°; 45° e 45°; A medida de $\widehat{COE}$ é o dobro das medidas de $\widehat{CBE}$, $\widehat{CAE}$, $\widehat{CHE}$, $\widehat{CGE}$ e $\widehat{CFE}$.
b) 135°; 67,5°; 67,5°; 67,5° e 67,5°; A medida de $\widehat{COF}$ é o dobro das medidas de $\widehat{CBF}$, $\widehat{CAF}$, $\widehat{CHF}$ e $\widehat{CGF}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Página 131

1 **a)** 1 620′
b) 47 593″
c) 777′
d) 3° 33′
e) 129 600″
f) 5° 10′
g) 61 920″
h) 59° 31′ 57″

2 414 000″; 131 400″; 163 200″; 324 900″

Página 132

1 **a)** 62° 32′
b) 126° 36′ 10″
c) 93° 2′ 15″
d) 90°
e) 25° 48′
f) 18° 7′ 40″
g) 6° 57′ 46″
h) 54° 10′ 14″

2 **a)** 158° 45′ 20″ **c)** 180°
b) 133° 30′ **d)** 46° 30′

Página 134

1 **a)** 271° 12′
b) 50°
c) 8° 11′ 31″
d) 226° 4′ 40″
e) 202° 42′ 40″
f) 49° 28′
g) 1° 52′ 30″
h) 42° 20′ 10″
i) 19° 35′ 50″
j) 5° 19′ 25″

2 **a)** 142° 27′
b) 93° 17′
c) 121° 32′
d) 48° 30′
e) 32° 58′
f) 15° 10′ 5″

3 **a)** 9° 5′
b) 198° 41′ 20″
c) 132° 58′
d) 16° 57′ 35″

Página 136

1 **a)** 30°
b) 50°
c) 30°
d) 50°
e) 35°
f) 35°
g) 80°
h) 160°
i) 115°
j) 130°
$A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$; $B\hat{O}C \cong D\hat{O}E$; $E\hat{O}F \cong F\hat{O}G$

3 Sim, o triângulo ABC é isósceles.

4 $S\hat{V}T \cong P\hat{O}Q$; $R\hat{S}T \cong N\hat{O}M \cong K\hat{Y}Z$; $F\hat{E}D \cong C\hat{B}A$

Página 137

1 $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$, $A\hat{O}D$ e $D\hat{O}E$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}E$, $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$, $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}E$

2 Exemplos de resposta:
a) $A\hat{O}F$ e $C\hat{O}D$
b) $D\hat{O}B$ e $A\hat{O}E$

3 **a)** 50°
b) 37°

Página 139

1 **a)** 35°
b) 25°
c) 95°

2 50° e 25°

3 40°

5 90°

Página 140

1 **a)** 14°
b) 44°
c) 52°
d) 90°
e) 8°
f) 5°
g) 64°
h) 0°

2 **a)** 53° 12′
b) 7° 10′
c) 10° 47′ 13″
d) 40° 31′ 11″

3 Sim, são complementares.

4 **a)** $x = 22°$ **c)** $x = 9°$
b) $x = 30°$ **d)** $x = 10°$

5 12°

6 41° 23′ 32″

Página 141

1 **a)** 104°
b) 150°
c) 180°
d) 52°
e) 5°
f) 0°

2 **a)** 43° 12′
b) 97° 12′
c) 76° 34′ 24″
d) 150° 14′ 25″

4 74°

5 **a)** $x = 50°$
b) $x = 30°$
c) $x = 90°$

Página 143

1 Exemplos de respostas:
ângulos o.p.v.: $D\hat{O}E$ e $B\hat{O}A$, $E\hat{O}F$ e $C\hat{O}B$, $D\hat{O}C$ e $F\hat{O}A$;
ângulos suplementares: $D\hat{O}E$ e $E\hat{O}A$, $C\hat{O}B$ e $B\hat{O}F$, $F\hat{O}A$ e $A\hat{O}C$

2 **a)** $x = 25°$
b) $x = 20°$

3 alternativas **c** e **d**

4 **a)** $x = 90°$ e $y = 110°$
b) $x = y = 80°$

Página 144 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** 1°
b) 10°
c) 3°
d) 1°

2 72 000″

3 **a)** 3 420′
b) 7 237′
c) 2 975′
d) 5 735′

4 40°

6 alternativa **c**

7 **a)** 130° 15′
b) 93° 2′ 35″
c) 29° 15′
d) 7° 32′ 52″
e) 159° 12′
f) 66° 31′ 40″
g) 44° 30′
h) 24° 43′ 30″

8 135°

9 14°

10 100°

11 40°

12 144°

13 200°

14 45°

15 46° 47′ 23″

Capítulo 7

Página 150

1 **a)** $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$ ou 5%
b) $\frac{15}{22}$
c) $\frac{17}{20}$
d) $\frac{1}{4}$

2 **a)** $\frac{4}{5}$ **b)** 70% **c)** 0,625

3 $\frac{1250}{10000} = \frac{1}{8}$

4 **a)** $\frac{4}{5}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{4}{1}$

5 **a)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{1}{2}$
b) 3 **d)** $\frac{1}{10}$ **f)** 20

6 **a)** $\frac{2}{5}$; 0,4; 40%
b) 32 testes

Página 154

1 **a)** $\frac{1}{2}$
b) 5
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{2}{5}$

2 $\frac{4}{7}$

3 2

4 $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{64}$

5 **a)** $\frac{2}{5}$
b) $\frac{4}{25}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{1}{10}$

6 $\frac{1}{2000}$

7 casa

8 17 m

9 150 km; 75 km; 125 km

10 **a)** 12 m e 10,2 m
b) 122,4 m^2
c) 16,8 m^2
d) 6,4 m^2

Página 157

1 **a)** 2 km/ℓ
b) 2 m/s
c) 5 hab./km^2
d) 0,01 médico/hab.
e) 2 alunos/m^2

2 56 km/h

3 0,2 g/cm^3

4 Mauro; 90 km/h

5 150 hab./km^2

6 20 km/h

7 8,5 km/ℓ

Página 158 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** 32
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{25}$
d) $\frac{1}{4}$

2 **a)** $\frac{1}{2}$
b) $\frac{7}{6}$
c) $\frac{4}{3}$

3 $\frac{7}{5}$

4 $\frac{1}{2}$

5 9 m^2

6 alternativa **e**

7 80 m

8 253,44 m

9 1 : 300

10 alternativa **c**

11 **a)** 4,2 m; 3,5 m
b) 14,7 m^2
c) 50,47 m^2

12 35 hab./km^2

13 alternativa **a**

14 750 km/h

15 126 000 habitantes

16 3,6 g/cm^3

17 15 pacotes

18 alternativa **d**

19 aproximadamente 231,6 km/h

20 840 km

21 alternativa **e**

22 alternativa **e**

23 alternativa **d**

24 alternativa **d**

25 alternativa **e**

Capítulo 8

Página 166

1 alternativas **a** e **c**

3 mais provável: C; menos provável: B

4 Sim, porque todas as bolas da bandeja são verdes.

5 **a)** impossível
b) provável
c) provável

6 **a)** 1
b) Nenhum, pois as probabilidades são iguais.
c) 4
d) 13

Página 167

1 **a)** $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
c) 0

2 **a)** $\frac{3}{10}$
b) $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
c) $\frac{3}{10}$

3 cara e cara; cara e coroa; coroa e coroa; $\frac{1}{3}$

4 $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

5 $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

6 **a)** $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{4}$

7 **a)** $\frac{55}{1000}$
b) $\frac{65}{1000}$
c) $\frac{935}{1000}$

Página 169

1 **a)** EUA, China, Reino Unido e Índia
b) 8ª posição
c) não

2 **b)** Direito: 15%
Engenharia: 7,5%
Medicina: 10%
Psicologia: 15%
Letras: 20%
Informática: 15%
Outros: 17,5%

Página 171

1 As duas ganharam a viagem.

2 **a)** 18
b) 22
c) 21

3 31 783

4 1 017 800 toneladas

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Página 173

1 R$ 58,60

2 6,5

3 1,64 m

Página 174

1 Abril: modas = 28 e 31; mediana = 31
Maio: moda = 32; mediana = 47

2 média: 5,0; mediana: 5,3; moda: 5,7

Página 176 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** ímpar **b)** $\frac{12}{25}$

2 $\frac{6}{20}$ ou $\frac{3}{10}$; $\frac{2}{20}$ ou $\frac{1}{10}$

3 **a)** $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

4 **a)** recipiente A; probabilidade $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$

5 **a)** $\frac{1}{8}$ **e)** $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{8}$ **f)** $\frac{3}{8}$
c) $\frac{1}{4}$ **g)** $\frac{3}{8}$
d) $\frac{1}{4}$

6 1 h 40 min

7 R$ 1 425,00

8 11,5 e 15

9 R$ 53,00

10 alternativa **d**

11 alternativa **d**

12 alternativa **d**

13 alternativa **b**

14 alternativa **c**

15 alternativa **b**

16 alternativa **e**

17 alternativa **d**

Capítulo 9

Página 184

1 Porque existe uma igualdade entre as razões.

2 **a)** três está para cinco, assim como nove está para quinze; meios, 5 e 9; extremos, 3 e 15
b) sete está para oito, assim como catorze está para dezesseis; meios, 8 e 14; extremos, 7 e 16

3 $\frac{1,5}{3,5} = \frac{3}{7}$; $\frac{20,1}{33,5} = \frac{3}{5}$; $\frac{2,5}{3,75} = \frac{2}{3}$

4 **a)** $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{1}$
b) $\frac{3}{6}$ ou $\frac{6}{3}$
c) sim, pois: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ ou $\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$

Página 187

1 alternativas **c** e **d**

2 **a)** 3 **b)** 24 **c)** 18 **d)** 80

3 300

4 3 496,5 ℓ

5 720 m

Página 190

1 sim

2 120, 180 e 300

3 8,5 e 15,3

4 48, 80 e 144

5 Ana: R$ 35 000,00;
Paula: R$ 15 000,00;
Carlos: R$ 10 000,00.

6 36 hectares

7 A = 90 mℓ; B = 210 mℓ

8 primeiro: R$ 9 900,00;
segundo: R$ 6 300,00

9 Pedro: R$ 9 000,00;
Paulo: R$ 15 000,00

10 R$ 1 000,00

Página 192

1 sim

2 sim

3 $a = 35$, $b = 14$ e $c = 10$

4 200, 100 e 40

5 42, 56 e 84

6 primeira caixa: 120 laranjas; segunda caixa: 80 laranjas; terceira caixa: 60 laranjas

7 $a = 48$, $b = 20$ e $c = 12$

8 Beto: 18 livros; Ana: 9 livros; Vera: 6 livros

9 Caroline: R$ 1600,00; Sofia: R$ 400,00; Nicole: R$ 640,00

Página 194 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** 24; 8
b) 9; 1
c) 15; 7
d) Sim, pois o bagdali deu 1 pedaço e Beremiz deu 7 pedaços.

2 **a)** $A = 12$ **b)** $A = 3$ **c)** $A = 7$

3 140 cm; 180 cm

4 108, 72 e 54
90 e 60

6 35 e 55

7 19,6 minutos

8 R$ 88 000 000,00;
R$ 128 000 000,00;
R$ 160 000 000,00

9 3 anos

10 55,5 cm^3

11 A: R$ 8 400,00; B: R$ 14 700,00; C: R$ 18 900,00

Capítulo 10

Página 201

1 **a)** diretamente proporcionais
b) inversamente proporcionais
c) diretamente proporcionais
d) diretamente proporcionais
e) inversamente proporcionais
f) Nem direta nem inversamente proporcionais.

2 diretamente proporcionais, pois:
$\frac{5}{15} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

3 diretamente proporcionais

4 inversamente proporcionais

5 Não, nada garante essa possibilidade, pois o número de dias que chove e o número de dias do mês não são direta nem inversamente proporcionais.

Página 203

1 24 escavadeiras

2 6 hectares

3 25 litros

4 2 gramas

5 32 minutos

6 32 dias

7 75 ligações

Página 206

1 aproximadamente 6 m

2 R$ 32 500,00

3 400 pratos de barro

4 16 horas

5 20 dias

6 35 dias

7 15 dias

8 15 dias

9 75 contêineres

Página 207 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 menos copos

2 Inversamente proporcionais, pois, aumentando o número de operários, o tempo diminui proporcionalmente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 inversamente proporcionais; veja: $8 \cdot 60 = 12 \cdot 40 = 16 \cdot 30$

4 1 000 m^3

5 alternativa **a**

6 22,5 minutos

7 **a)** R$ 12,00

b) 24 vasilhas

c) Não podemos responder, pois as grandezas não são proporcionais.

8 O antílope, pois a velocidade do leão é 80 km/h, ou seja:
$\frac{80\,000\text{ m}}{3600\text{ s}} \simeq 22{,}22\text{ m/s}$

9 867 litros

10 15 latas

11 10 km2

12 24 dias

13 8 dias

14 8 marujos

15 16 km

16 16 cm

17 8 cm

18 alternativa **d**

19 270 hectares

20 40 homens

21 200 voltas

22 791 oscilações

23 15 dias

24 144 litros

25 2 horas

26 64 dias

27 6,5 horas

28 18 dias

29 12,5 horas

30 16 dias

31 alternativa **a**

Capítulo 11

Página 217

1 **a)** 100 laranjas
b) 600 tijolos
c) 540 alunos

2 15 pontos; 12 pontos

3 **a)** 72,5% **b)** 16,7%

4 O pacote de 400 g oferece 10 g a mais de café adicional que o pacote de 250 g.

5 5 000 entrevistados

6 50 partidas

8 70%

9 **a)** 7 713 metros **b)** 24,62%

Página 219

1 R$ 520,00

2 **a)** aproximadamente 9%
b) aproximadamente 49,9%

3 R$ 21,00; R$ 81,00

4 R$ 1 188,00

5 R$ 69,75

6 R$ 1 470,00

7 **a)** R$ 21,00 **b)** R$ 399,00

8 R$ 160,00

Página 221

1 R$ 144,00

2 2,5% ao mês

3 R$ 37 600,00

4 9,6% ao ano

5 R$ 540,00

6 R$ 1 440,00

7 R$ 1 180,00

8 1,72% ao mês

9 3,5% ao mês

Página 224 – Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Aplicando

1 **a)** 90% **b)** 55% **c)** 125%

2 **a)** 10% **c)** 5%
b) 80% **d)** 8,5%

3 **a)** 487,5 **c)** 127 687
b) 2 919,575

4 **a)** 400 **b)** 400

5 R$ 28,00

6 60%

7 R$ 15,00

8 R$ 500,00

9 1,845 m

10 R$ 80,00

11 427,00

12 126,5 kg

13 **a)** 31,34%
b) Sim, pois é inferior a 33,33%.

14 alternativa **b**

15 65%

16 R$ 4 008,00

17 R$ 1 440,00; R$ 3 940,00

18 0,7%

19 R$ 2 400,00

20 R$ 480,00

21 R$ 10 000,00

22 alternativa **d**

23 3 meses

24 0,6%; 7,2%

25 alternativa **c**

26 alternativa **c**

Desafio: R$ 1 200,00

27 alternativa **d**

28 alternativa **d**

29 37

Desafio: alternativa **e**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUGESTÕES DE LEITURA

A invenção dos números

Oscar Guelli
São Paulo: Ática, 1998.
64 páginas

Nessa obra, o autor apresenta a interessante história do aparecimento dos números, desde os primeiros registros, como o uso dos dedos, passando pelos nós em cordões, até chegar ao surgimento dos algarismos. O livro aborda também os diferentes conjuntos de números.

REPRODUÇÃO

É divertido resolver problemas

Josimar Silva e Luís Lopes
Rio de Janeiro: Interciência, 2000.
96 páginas

Nesse livro, os autores apresentam 300 problemas que exploram mais o raciocínio e a criatividade do que fórmulas e equações. As atividades envolvem vários assuntos e mostram que a Matemática pode ser divertida e lúdica.

REPRODUÇÃO

O aprendiz

Egídio Trambaiolli Neto
São Paulo: FTD, 1997.
104 páginas

Nessa interessante obra, o autor apresenta desafios, problemas com equações do 1º grau, múltiplos e divisores, operações com números decimais, propriedades da potenciação, retângulo áureo e muito mais.

REPRODUÇÃO

Frações sem mistérios

Luzia Faraco Ramos
São Paulo: Ática, 2002.
104 páginas

Nesse livro, a autora narra uma interessante história de aventura, envolvendo o leitor com paixões não reveladas, um misterioso carro preto, que aparece em todos os lugares, e movimentos estranhos numa chácara abandonada. Tudo acontece enquanto os protagonistas aprendem os conceitos de frações.

REPRODUÇÃO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

BIBLIOGRAFIA

Almanaque Abril 2013: Brasil. São Paulo: Abril, 2013.

Asger Aaboe. *Episódios da história antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Bernard H. Gundlach. *Números e numerais*. São Paulo: Atual, 2005. (Tópicos de história da Matemática para uso em sala)

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brian Bolt. *Actividades matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1991.

Carl Benjamim Boyer. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/ Edusp, 2010.

Constance Kamii. *Reinventando a Aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1995.

Delia Lerner Zunino. *A Matemática na escola*: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 2003.

Dicionário Enciclopédico Tudo. São Paulo: Nova Cultural, 1979.

Dione Lucchesi de Carvalho. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 2009.

Elon Lages Lima. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

Ernesto Rosa Neto. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 2010.

George Polya. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Georges Ifrah. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

_____. *Os números*: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1998.

Howard Eves. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.

Luiz Márcio Imenes. *A numeração indo-arábica*. São Paulo: Scipione, 1990. (Coleção Vivendo a Matemática)

Luiz Roberto Dante. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

Luzia Faraco Ramos. *O que fazer primeiro?* São Paulo: Ática, 2001. (Coleção A descoberta da Matemática)

Malba Tahan. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

_____. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2012.

_____. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

Maria Cristina S. A. Maranhão. *Matemática*. São Paulo: Cortez, 1994.

Marilia Centurión. *Conteúdo e metodologia da Matemática*: números e operações. São Paulo: Scipione, 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Martin Gardner. *Matemática, magia e mistério*. Trad. Jorge Lima. Lisboa: Gradiva, 1991.

Milton Zaro. *Matemática experimental*. São Paulo: Ática, 1996.

Oscar Guelli. *Contando a história da Matemática*. São Paulo: Ática, 1999.

Paul Karlson. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

Pierre Berloquin. *100 jogos geométricos*. Lisboa: Gradiva, 2005.

Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática.

Rômulo C. Lins; Joaquim Gimenez. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LISTA DE SIGLAS

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática

Obmep: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Suplemento com orientações para o professor

7º ano

Sumário

Orientações gerais

- **Apresentação** **244**
- **Objetivos gerais da coleção** **245**
- **Organização** **245**
- **Matemática escolar** **246**
- **Apresentação da proposta didática** **247**
- **A utilização da História da Matemática** **254**
- **As tecnologias e a aprendizagem da Matemática** **254**
- **Avaliação de aprendizagem** **255**
- **Formação do professor – sugestões de leitura e *sites*** **256**

Orientações para o desenvolvimento dos capítulos

Capítulo 1	Números inteiros	262
Capítulo 2	Números racionais	266
Capítulo 3	Expressões algébricas e sentenças matemáticas	269
Capítulo 4	Equações do 1º grau com uma incógnita	271
Capítulo 5	Inequações do 1º grau com uma incógnita	274
Capítulo 6	Ângulos	276
Capítulo 7	Razão	278
Capítulo 8	Probabilidade e Estatística	280
Capítulo 9	Proporção	283
Capítulo 10	Grandezas e regra de três	284
Capítulo 11	Porcentagem e juro simples	286

Orientações gerais

APRESENTAÇÃO

Professor

Esta coleção tem como objetivo principal servir de apoio didático para suas aulas. No Guia Didático (Manual do Professor) você encontra algumas reflexões sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática na Escola Básica.

Observe que falamos de "ensino e de aprendizagem", separadamente, sem o hífen muitas vezes utilizado: ensino-aprendizagem. Entendemos que são processos que se articulam, mas são distintos – processo de ensino + processo de aprendizagem. O ensino pode ocorrer sem que ocorra a aprendizagem e a aprendizagem pode ocorrer sem que ocorra o ensino. Na escola, buscamos sempre que esses dois processos andem juntos, se completem, e esse pressuposto guia a organização desta coleção. Lembramos você, professor, que a escolha do livro didático é muito importante, e que deve ser feita sempre a partir do conhecimento de sua realidade escolar. E já que escolheu trabalhar com esta coleção, queremos ajudá-lo a atingir seus objetivos didáticos, valorizando sua autonomia didática na organização e gestão de suas aulas.

Com isso, o papel do professor – seu papel – é de fundamental importância. E nosso papel, oferecendo esta coleção como ferramenta de trabalho, é fomentar situações que lhe permitam sempre enriquecer suas aulas e, em consequência, favorecer as condições de aprendizagem dos seus alunos.

Neste guia trataremos de aspectos da abordagem dos conteúdos, do uso de calculadoras e *softwares*, mas também do uso de materiais concretos, sempre no intuito de enriquecer a gama de materiais didáticos disponíveis. Um tópico importante para reflexão é a avaliação da aprendizagem: vamos articular os objetivos gerais da aprendizagem com a ideia de avaliação e os possíveis instrumentos a serem utilizados. Apresentaremos também sugestões de leituras que permitirão a você, professor, aprofundar-se em suas reflexões.

O professor é o grande mediador na relação entre o aluno e a Matemática escolar: ele planeja, organiza, elabora as situações de aprendizagem, faz a gestão dessas situações, sempre buscando que seus alunos construam conhecimentos que lhes ajudarão em situações presentes e futuras, tanto no âmbito escolar como em suas vidas fora dos muros da escola. Não podemos esquecer também que o objetivo da aprendizagem escolar é a formação humana integral e que por esse motivo é necessário também levar em consideração a vida pessoal e profissional dos alunos. Ferreira (2006)[1] defende que a escola deve promover o desenvolvimento humano, conectando todos os conhecimentos, sejam de ordem cotidiana, sejam de ordem científica. Na organização desta coleção, tanto na parte destinada ao aluno como na parte específica para o professor, assumimos também essa defesa.

Para construir este Guia Didático, visando auxiliar na utilização desta coleção, baseamo-nos nos princípios da Educação Matemática, que é uma área que estuda os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, ou seja, partimos da compreensão de que a Matemática feita pelos matemáticos é diferente da matemática a ser trabalhada na escola.

1 FERREIRA, L. R. Matemática Escolar: conceitos do cotidiano na vida profissional. In: *ZETETIKÉ*, v. 14, n. 26. jul./dez. FE/Unicamp. 2006.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012)[2], os estudos feitos no campo da Educação Matemática têm como perspectiva "o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor" (p. 4). Nesse sentido, esta coleção visa tal formação e considera que não se pode confundir a aplicação de algoritmos com o fazer matemático, pois a Matemática vai muito além. Dessa forma, apresentamos a Matemática escolar de forma que o aluno possa crescer em sua aprendizagem, aprender a pensar matematicamente, resolver problemas diversos, mas sempre no espectro da Matemática escolar.

Neste guia, convidamos você a refletir conosco sobre o "como trabalhar" com os conteúdos da Matemática escolar selecionados para cada ano das séries finais do Ensino Fundamental.

OBJETIVOS GERAIS DA COLEÇÃO

Ao escolhermos e organizarmos os conteúdos a serem abordados ao longo dos quatro anos desse ciclo escolar, tivemos a preocupação de proporcionar aos alunos as melhores condições para construção dos conhecimentos matemáticos esperados para essa faixa de escolaridade. Pautamo-nos nos objetivos estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998)[3], que pode ser consultado a qualquer momento por todos os que se interessam e se preocupam com o ensino e a aprendizagem nessa área do saber.

Dentre os objetivos gerais para o Ensino Fundamental, anunciados nos PCN, destacamos três deles:

- utilizar as diferentes linguagens – verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar as produções culturais e usufruir delas, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Fundamentados nesses objetivos (sem esquecer os demais, logicamente) e nos anunciados para cada ciclo do Ensino Fundamental, adotamos nesta coleção, o objetivo principal de desenvolver as competências necessárias para a aprendizagem da Matemática e para a formação integral do aluno, tal como abordamos na apresentação da obra. Para isso, buscamos construir elementos que permitam desenvolver o pensamento e o raciocínio matemático, construindo habilidades para a resolução de problemas, para a comunicação matemática e para a análise críticas de situações diversas do cotidiano.

ORGANIZAÇÃO

Esta coleção é organizada em quatro volumes, que são dispostos em capítulos e tópicos. O tema do capítulo, apresentado em página dupla, permite ao professor provocar questionamentos sobre o que será desenvolvido, por meio de associações com situações da realidade.

2 FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3ª. edição revisada. Campinas: Editores Associados, 2012.

3 BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.

A abertura de cada capítulo sempre traz uma proposta de questionamento no quadro "É hora de observar e discutir". Em seguida, o capítulo apresenta a seção "Trocando ideias", na qual o tema é abordado por meio de exemplos de aplicação, com contextos de situações da realidade como também da própria matemática.

Essa forma de primeiro contato com o conteúdo a ser trabalhado permite ao professor inserir atividades diversas a cada capítulo: pesquisas, jogos, entre outras opções. É também uma oportunidade para desencadear um debate com os alunos, visando identificar os conhecimentos prévios para que estes sejam o ponto de partida para a construção de novos saberes.

Um exemplo é a abordagem das operações com números naturais: os alunos já possuem algum conhecimento construído ao longo dos anos anteriores e, retomá-los, permite ao professor fazer um trabalho mais significativo para o aluno.

Após a abertura e a seção "Trocando ideias", seguem os tópicos, que desenvolverão o conteúdo organizado de forma que o aluno aprenda paulatinamente. O número de tópicos varia a cada capítulo. Nesses tópicos são apresentados definições, propriedades, exemplos e situações que permitem maior detalhamento, para em seguida propor as atividades a serem resolvidas pelos alunos. Em alguns tópicos, são apresentadas também as seções "Lendo e aprendendo" e "Um pouco de história", com o objetivo de enriquecer a aprendizagem.

Os capítulos são finalizados com atividades que permitem ao aluno um aprofundamento – "Trabalhando os conhecimentos adquiridos". A seção "Resolvendo em equipe" traz um problema a ser resolvido pelos alunos organizados em grupos, com orientação para as etapas de resolução: interpretação e identificação de dados, plano de resolução, resolução, verificação, apresentação.

O trabalho em equipe é muito importante sob diversos pontos de vista: permite ao aluno aprender pela troca com os colegas; explicitar seus conhecimentos e dúvidas, facilitando a ação do professor, validar o raciocínio construído por meio do diálogo com os colegas da equipe. Além disso, saber trabalhar em equipe é uma competência exigida nas mais diversas profissões de diferentes áreas.

O uso de tecnologias é uma prerrogativa do professor e uma realidade no mundo de hoje. Algumas atividades propostas na coleção orientam para o uso de calculadoras. É importante que os alunos se apropriem de seu uso, utilizando-as como ferramenta para descoberta de estratégias na resolução das atividades propostas – estratégias distintas daquelas apresentadas na coleção. Valoriza-se assim também o desenvolvimento da criatividade, entre outras habilidades e competências visadas ao longo da vida escolar do aluno.

MATEMÁTICA ESCOLAR

Usualmente lemos ou escutamos frases como "aprender matemática é importante para o desenvolvimento do raciocínio", e outras com os mesmos pressupostos. Realmente, essa é uma verdade, que, para ser compreendida, precisa ser mais bem analisada. Em pesquisa realizada, Maciel (2009)[4] comprova a importância da Matemática na formação do cidadão. A autora afirma:

> *Desse estudo concluiu-se que o ensino da Matemática é um dos elementos fundamentais para a formação social e intelectual do aluno, fazendo deste um ser humano dotado de conhecimento, possuidor da capacidade de evoluir culturalmente, se tratando de um cidadão apto e preparado para lidar com as mudanças da sociedade. Assim sendo imprescindível o desenvolvimento da autonomia, da criticidade, da criatividade e da capacidade de argumentação, assim se comprovou a importância do ensino da Matemática como componente curricular. (p. 1)*

4 MACIEL, M. V. A importância do ensino da Matemática na formação do cidadão. In: *Revista da Graduação*. EdiPUCRS. 2009. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/graduacao/article/view/6058>. Acesso em: maio 2015.

A Matemática escolar difere da Matemática acadêmica pelo grau de profundidade da abordagem: a Matemática feita pelos matemáticos tem características que não se adequam às atividades para descoberta e aprendizagem. O conhecimento matemático passa, assim, por transformações que resultam em um conjunto de saberes escolares, acessíveis aos alunos. É o que Chevallard (1991)[5] chama de transposição didática: toda transformação sofrida por um saber para que este se adapte a uma instituição (nesse caso, a escola).

Tais transformações são demandadas e trabalhadas pelos que concebem currículos e propostas curriculares, pelas instituições de ensino, pelos autores de livros didáticos, pela sociedade, pelos pais etc. Os resultados são apresentados nas propostas curriculares, nos livros didáticos, e são trabalhados pelos professores em sua sala de aula, completando o ciclo de transformações: de saber científico a saber ensinado.

Os conteúdos abordados nesta coleção encaixam-se nessa perspectiva: fazem parte do conjunto de conteúdos da Matemática escolar, da Matemática a ser aprendida pelos alunos durante sua escolaridade, sem perder de vista o saber de referência, ou seja, a Matemática em sua dimensão de saber científico.

APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

A Matemática trabalhada no Ensino Fundamental não tem um fim em si mesma: além de aprofundar e sistematizar aprendizagens anteriores, abre também as portas para novas aprendizagens, considerando as diversas áreas do saber, contribuindo para o desenvolvimento intelectual do aluno. O conhecimento matemático é, assim, o objeto de estudo nas aulas de Matemática, para que possa ser a ferramenta de trabalho tanto na resolução de problemas matemáticos como na construção de novos conhecimentos oriundos tanto da ciência como do cotidiano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil 1998) afirmam que "a seleção de conteúdos a serem trabalhados pode se dar numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificá-los como formas e saberes culturais cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos" (p. 49). Consideram-se aqui conceitos, procedimentos e atitudes.

Nesta coleção, a seleção dos conteúdos foi feita nessa perspectiva, e as abordagens propostas pressupõem desenvolvimento de atitudes importantes na formação do aluno. Escolhemos abordar conceitos e procedimentos (seleção e abordagem) tanto como forma de aprofundamento, de revisita aos conhecimentos prévios dos alunos, como iniciando a construção de novos conhecimentos a serem consolidados em anos posteriores de escolaridade.

O professor pode acrescentar atividades, questionamentos, de modo a atender as especificidades de suas turmas: o livro didático nunca pode ser uma amarra para o professor, deve ser um facilitador de seu trabalho. O Guia Didático traz diversas sugestões que o professor poderá ou não utilizar, sempre a partir do conhecimento de seus alunos e do currículo da escola. A busca é e será sempre por um aprendizado não mecanizado, um aprendizado que permita a construção de significados e, portanto, de articulações entre conteúdos, áreas da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

5 CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M-A. *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 1 – Números naturais e sistemas de numeração Sistemas de numeração Sistema de numeração decimal Os números naturais Igualdade e desigualdade A reta numérica e os números naturais Leitura e escrita de um número natural	**Capítulo 1 –** Números inteiros Números inteiros Reta numérica Módulo de um número inteiro Números opostos ou simétricos Comparação de números inteiros Adição de números inteiros Subtração de números inteiros Multiplicação de números inteiros Divisão exata de números inteiros Potenciação em que a base é um número inteiro Raiz quadrada exata de números inteiros Expressões numéricas	**Capítulo 1 –** Números reais Números naturais, números inteiros e números racionais Números irracionais Números reais	**Capítulo 1 –** Potenciação e radicais Potência de um número real com expoente inteiro Raiz enésima de um número real Simplificação de radicais Radicais semelhantes Adição e subtração de radicais Multiplicação de radicais Divisão de radicais Potenciação e radiciação de radicais
Capítulo 2 – Operações com números naturais Adição com números naturais Algumas propriedades da adição Subtração com números naturais Relação fundamental da subtração Expressões numéricas com adições e subtrações Multiplicação com números naturais Algumas propriedades da multiplicação Divisão exata com números naturais Expressões numéricas com as quatro operações Divisão não exata	**Capítulo 2 –** Números racionais Números racionais Representação dos números racionais na reta numérica Módulo de um número racional Oposto de um número racional Comparação de números racionais Adição e subtração de números racionais Multiplicação de números racionais Divisão de números racionais Potenciação de números racionais Raiz quadrada de números racionais Expressões numéricas	**Capítulo 2 –** Potenciação e radiciação de números reais Potenciação Radiciação	**Capítulo 2 –** Equações do 2º grau Equação do 2º grau com uma incógnita Raiz de uma equação do 2º grau Resolução de equações do 2º grau Relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau Resolução de problemas Sistemas de equações

Números e operações

Álgebra

Geometria

Tratamento da informação

Grandezas e medidas

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 3 – Outras operações com números naturais Potenciação com números naturais Propriedades da potenciação Radiciação de números naturais Expressões numéricas com números naturais	**Capítulo 3 –** Expressões algébricas e sentenças matemáticas Expressões algébricas Valor numérico de uma expressão algébrica Termos algébricos Sentenças matemáticas	**Capítulo 3 –** Monômios e polinômios Expressões algébricas Monômio Adição e subtração de monômios Multiplicação de monômios Divisão de monômios Potenciação de monômios Polinômio Adição de polinômios Subtração de polinômios Multiplicação de polinômios Divisão de polinômios	**Capítulo 3 –** Função afim Ideia de função Representação gráfica de uma função Função afim
Capítulo 4 – Figuras geométricas espaciais Sólidos geométricos Poliedros Corpos redondos Planificação da superfície de sólidos geométricos Vistas	**Capítulo 4 –** Equações do 1º grau com uma incógnita Equações Raiz de uma equação Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita Resolução de problemas	**Capítulo 4 –** Produtos notáveis e fatoração Produtos notáveis Fatoração	**Capítulo 4 –** Funções quadráticas Função quadrática Gráfico de uma função quadrática Ponto de mínimo e ponto de máximo de uma função quadrática
Capítulo 5 – Múltiplos e divisores Múltiplos de um número natural Divisores de um número natural Critérios de divisibilidade Número 1, números primos e números compostos Decomposição em fatores primos Máximo divisor comum (mdc) Mínimo múltiplo comum (mmc)	**Capítulo 5 –** Inequações do 1º grau com uma incógnita Desigualdades Inequações equivalentes Resolução de uma inequação do 1º grau	**Capítulo 5 –** Retas e ângulos Retas Segmento de reta Ângulo Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal	**Capítulo 5 –** Estatística e probabilidade Processo estatístico Construção de gráficos Determinação de parâmetros Probabilidade

Números e operações

Álgebra

Geometria

Tratamento da informação

Grandezas e medidas

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 6 – Frações A ideia de número fracionário Leitura de frações Comparando frações com o inteiro Número misto Frações equivalentes Simplificação de frações Comparação de frações Fração de uma quantidade Adição e subtração de frações Multiplicação de frações Divisão de frações Potenciação e raiz quadrada de frações Expressões numéricas	**Capítulo 6 –** Ângulos O ângulo e seus elementos Medida de ângulo Transformação de unidades Operações com medidas de ângulos Ângulos congruentes Ângulos adjacentes Bissetriz de um ângulo Ângulos complementares Ângulos suplementares Ângulos opostos pelo vértice	**Capítulo 6 –** Polígonos e simetria Polígonos Diagonais de um polígono Ângulos internos e ângulos externos de um polígono Simetria	**Capítulo 6 –** Segmentos proporcionais e semelhança Razão entre segmentos e segmentos proporcionais Teorema de Tales Teorema da bissetriz interna Semelhança Triângulos semelhantes Homotetia
Capítulo 7 – Números decimais Décimos, centésimos e milésimos Leitura dos números decimais Comparação de números decimais Adição e subtração com números decimais Multiplicação com números decimais Divisão com números decimais Decimais exatos e dízimas periódicas Expressões numéricas com números decimais	**Capítulo 7 –** Razão Razão Razão entre grandezas de mesma natureza Razão entre grandezas de naturezas diferentes	**Capítulo 7 –** Frações algébricas e equações fracionárias Frações algébricas Simplificação de fração algébrica Redução de frações algébricas ao mesmo denominador Adição e subtração de frações algébricas Multiplicação de frações algébricas Divisão de frações algébricas Equações fracionárias	**Capítulo 7 –** Relações métricas em um triângulo retângulo e razões trigonométricas Projeções ortogonais Triângulo retângulo Teorema de Pitágoras e aplicações Razões trigonométricas no triângulo retângulo As razões trigonométricas de 30°, 45° e 60° Tabela de razões trigonométricas Resolução de problemas
Capítulo 8 – Porcentagem, possibilidades e Estatística Porcentagem Cálculo do número de possibilidades Estatística	**Capítulo 8 –** Probabilidade e Estatística O que é probabilidade? Cálculo de probabilidades Estatística Média aritmética simples, média aritmética ponderada, mediana e moda	**Capítulo 8 –** Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas Par ordenado Equação do 1º grau com duas incógnitas Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas Resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas Solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas	**Capítulo 8 –** Circunferência, arcos e relações métricas O comprimento da circunferência Medida de um arco de circunferência Relações métricas em uma circunferência

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 9 – Figuras geométricas planas Representação de ponto, reta e plano Semirreta e segmento de reta Ângulos Posições entre duas retas no plano Polígonos Triângulos Quadriláteros Circunferência e círculo	**Capítulo 9 –** Proporção Proporção Propriedade fundamental das proporções Sequências de números diretamente proporcionais Sequências de números inversamente proporcionais	**Capítulo 9 –** Estatística e probabilidade Estatística Gráficos de segmentos e de barras Gráfico de setores Cartograma e pictograma Probabilidade	**Capítulo 9 –** Polígonos regulares Polígonos Polígonos regulares Relações métricas nos polígonos regulares
Capítulo 10 – Medidas de comprimento e de tempo Metro Conversão de unidades Perímetro de um polígono Horas, minutos e segundos	**Capítulo 10 –** Grandezas e regra de três Grandezas proporcionais Regra de três simples Regra de três composta	**Capítulo 10 –** Triângulos Triângulo Classificação de triângulos Cevianas notáveis Casos de congruência de triângulos Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo Propriedades dos triângulos isósceles Propriedades dos triângulos retângulos	**Capítulo 10 –** Área de figuras planas Área Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo Área do triângulo Área do trapézio e do losango Área de um polígono regular Área do círculo
Capítulo 11 – Medidas de superfície e de volume Metro quadrado Área do retângulo e área do quadrado Metro cúbico Volume do paralelepípedo e do cubo	**Capítulo 11 –** Porcentagem e juro simples Porcentagem Cálculo de acréscimos e descontos Juro simples	**Capítulo 11 –** Quadriláteros Quadriláteros Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo Paralelogramos Trapézios	**Capítulo 11 –** Matemática comercial e financeira Operações sobre mercadorias Juro simples Juro composto
Capítulo 12 – Medidas de capacidade e de massa Litro Quilograma		**Capítulo 12 –** Circunferência e círculo Circunferência e círculo Posições de um ponto em relação a uma circunferência Posições de uma reta em relação a uma circunferência Posições relativas de duas circunferências Segmentos tangentes Arco de circunferência e ângulo central Ângulo inscrito	

Números e operações
Álgebra
Geometria
Tratamento da informação
Grandezas e medidas

No que se refere aos conteúdos relacionados ao bloco de conhecimentos **Números e Operações**, espera-se que o aluno perceba seus diferentes usos e significados ao longo de sua escolaridade, ampliando o conhecimento construído em anos anteriores. As operações e suas propriedades são trabalhadas de forma gradativa, a cada conjunto numérico abordado: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

A apresentação dos conteúdos se inicia sobre a abordagem dos sistemas de numeração, para depois apresentar o sistema de numeração decimal e o conjunto dos números naturais. A partir daí, apresentam-se os demais conteúdos, sistematicamente e sem que cada tópico ou capítulo esgote o conteúdo. O objetivo principal é a atribuição de significados: o cálculo é importante, mas a compreensão dos resultados obtidos na resolução de um problema, ou mesmo ao final de um procedimento, deve ser a meta principal do processo de ensino e de aprendizagem.

Os PCN de Matemática para o terceiro e quarto ciclos (Brasil, 1998), orientam para que

> *O trabalho com os conteúdos relacionados aos números e as operações deve privilegiar atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações. (p. 95-96)*

Nossa opção pela atribuição de significados se reflete não apenas ao longo dos capítulos, mas também nas orientações didáticas presentes na parte específica deste manual.

O campo da **Álgebra** é abordado a partir do volume destinado ao 7º ano, buscando uma articulação com o campo de Números e Operações: inicia-se com as expressões algébricas. Ao longo dos quatro anos finais do Ensino Fundamental, a Álgebra caracteriza-se como um espaço bastante significativo para o desenvolvimento dos processos de abstração e de generalização, o que é assinalado nos PCN.

Nesse aspecto, destaca-se a importância de que o ensino dos conteúdos desse bloco não se limite à repetição de algoritmos. É necessário que o aluno desenvolva ferramentas para resolver problemas: os exercícios de fixação são importantes, mas não devem se constituir em abordagem principal.

A formalização excessiva também é evitada ao longo desta coleção: a construção dos conhecimentos se faz paulatinamente. Assim, os primeiros contatos com a Álgebra acontecem no 7º ano (nesta coleção) e, assim como para os demais blocos de conteúdo, os temas não se esgotam, de forma a contribuir com o amadurecimento dos alunos para que, ao terem contato com a formalização, possam atribuir significados a ela.

Os PCN apresentam (p. 116) uma síntese com os significados da Álgebra a serem desenvolvidos nos ciclos finais do Ensino Fundamental:

Álgebra no Ensino Fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variações de grandezas	Resoluções de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

A percepção de padrões contribui bastante para a compreensão dos procedimentos, por exemplo, para a operação entre monômios, entre polinômios, para o desenvolvimento de expressões algébricas, para o trabalho com as funções: a introdução das letras como variável, como incógnita ou como símbolo pode ser trabalhada a partir da observação de padrões, antes que se apresentem os algoritmos.

A utilização de calculadoras, planilhas e *softwares* para o ensino da Matemática também favorece a construção de significados: a construção de gráficos, por exemplo, pode ser extremamente favorecida pelo uso de ambiente computacional.

O papel da **Geometria** é fundamental na construção do conhecimento matemático pelo aluno. O conhecimento nessa área é trabalhado desde os primeiros anos de escolaridade, e se aprofunda no Ensino Fundamental II, em uma articulação desejável entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial. A utilização de *softwares* e de materiais concretos permite facilitar a compreensão pelo recurso da visualização, da manipulação das figuras geométricas, permite avançar no estudo do espaço, das formas, das grandezas relacionadas e suas medidas. As construções com régua e compasso ampliam e aprofundam as relações construídas pelos alunos.

Nesse contexto se insere a abordagem das transformações geométricas, do estudo das vistas e da percepção espacial, dos deslocamentos no plano e sistema cartesiano. A resolução de problemas é um cenário potencial para essa abordagem. Os primeiros passos na argumentação e na demonstração são dados também nesse cenário da Geometria. No entanto, deve-se evitar ainda nessa fase de escolaridade o excesso de formalização: a construção do pensamento geométrico é um processo não linear, que está em constante crescimento ao longo da vida escolar do aluno.

O campo designado por **Tratamento da Informação** é bastante propício ao desenvolvimento de atividades lúdicas e de atividades que trabalhem profundamente com a criticidade dos alunos: são trabalhadas no Ensino Fundamental algumas ferramentas que auxiliam na compreensão de notícias, de dados fornecidos pelas diversas mídias, de dados referentes à vida cotidiana pessoal do aluno e da família. Amplia-se, assim, um cenário de construção da cidadania.

A coleta de dados e sua organização em gráficos e tabelas são uma etapa anunciada pelas pesquisas na área como fundamental para que os alunos aprendam a mobilizar correta e adequadamente seus conhecimentos para análise estatística desses dados coletados. O objetivo será sempre responder a um questionamento por meio da análise desses dados.

Aprofunda-se também a discussão que permite distinguir o aleatório do determinístico. Nesse sentido, o estudo da probabilidade por meio de experimentações e simulações é bastante favorecido. O professor tem a possibilidade de utilizar tanto materiais concretos (jogos ou mesmo materiais construídos com os alunos, que possam ser utilizados para realização de sorteios aleatórios e simulações) como *softwares* livres (por exemplo, o GeoGebra). O objetivo deve ser a construção de estimativas plausíveis para resultados de experimentos aleatórios.

A leitura estatística e probabilística dos fatos que nos cercam fornece importantes elementos para decisões no campo pessoal, nutricional, de investimentos, de segurança, de confiabilidade em processos de qualidade, em processos de pesquisa de opinião, entre muitas outras. A percepção e a apreensão da variação dos dados coletados nos diversos contextos que se quer analisar são objetivos centrais no estudo dos conteúdos ligados ao Tratamento da Informação.

Os conteúdos relacionados ao campo das **Grandezas e Medidas** podem ser abordados em articulação com os demais campos da Matemática escolar. Contextos ligados ao cotidiano do aluno fornecem elementos para que o professor possa trabalhar tais conteúdos em sala de aula, sem desvincular a Matemática da realidade do aluno. A compreensão das diversas grandezas e das medidas que se associam, destacando a discussão sobre as mudanças de unidades e os efeitos de tais mudanças na análise dos resultados observados na resolução das atividades propostas, é fundamental para a aprendizagem conceitual da Matemática. Nesse sentido, destaca-se o papel do trabalho com os instrumentos de medida.

Os PCN destacam o importante papel do estudo das Grandezas e Medidas, uma vez que favorece articulações "intra" e "extra" Matemática. Destacam sua utilização em contextos diversos e que permitirão que sejam retomados, discutidos e ampliados procedimentos de medidas, discutindo a comparação com padrões determinados – geométricos ou não:

> *(...) Além disso, como as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são essenciais para a interpretação deste, as possibilidades de integração com as outras áreas são bastante claras, como Ciências Naturais (utilização de bússolas e noções de densidade, velocidade, temperatura, entre outras) e Geografia (utilização de escalas, coordenadas geográficas, mapas etc.). As medidas também são necessárias para melhor compreensão de fenômenos sociais e políticos, como movimentos migratórios, questões ambientais, distribuição de renda, políticas públicas de saúde e educação, consumo, orçamento, ou seja, questões relacionadas aos Temas Transversais. (p. 128)*

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A abordagem de episódios da História da Matemática permite aos alunos a percepção de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada. Ela se desenvolveu ao longo do tempo e ainda está em desenvolvimento. Pequenos textos que trazem informações sobre fatos e pessoas ligadas ao seu desenvolvimento permitem ao professor promover discussões e sugerir pesquisas aos alunos, com objetivo de ampliar os horizontes da aprendizagem matemática.

Por exemplo, no estudo de conteúdos da Geometria, o desenvolvimento de pesquisas que permitam conhecer elementos sobre sua história, sobre os locais nos quais a Geometria se desenvolveu, sobre as características sociais, geográficas, pode contribuir para a compreensão do contexto no qual o objeto matemático em estudo se desenvolveu.

A aprendizagem matemática tem, assim, como ferramenta didática disponível, a história da Matemática, junto à resolução de problemas à modelagem. Não cabe ao livro didático fazer um estudo aprofundado da história, mas sim promover elementos que servirão como ponto de partida para complementação e aprofundamento dos conteúdos abordados.

AS TECNOLOGIAS E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A utilização das diversas tecnologias de aprendizagem na aula de Matemática permite uma expansão das oportunidades de construção de conhecimento. Particularmente citando a calculadora e os *softwares* para aprendizagem da Matemática, que permitem a ampliação na busca de novas estratégias para resolução de problemas.

> *A utilização e a exploração de aplicativos e/ou softwares computacionais em Matemática podem desafiar o aluno a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, levá-lo a articular os significados e as conjecturas sobre os meios utilizados e os resultados obtidos, conduzindo-o a uma mudança de paradigma com relação ao estudo, na qual as propriedades matemáticas, as técnicas, as ideias e as heurísticas passem a ser objeto de estudo. (AGUIAR, 2008, p. 64)*[6]

A prontidão para a atuação profissional compreende o conhecimento de diversas tecnologias e linguagens, e a escola é um dos ambientes mais propícios para a construção de tal conhecimento. Não cabe ao Ensino Fundamental o preparo de mão de obra especializada, como podemos encontrar nos PCN. No entanto, "é papel da escola desenvolver uma educação que não dissocie escola

6 AGUIAR, E. V. B. As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem. In: *VÉRTICES*, v. 10, n. 1/3, jan./dez. 2008. Disponível em: <www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/outros/Aguiar_Rosane.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

e sociedade, conhecimento e trabalho, e que coloque o aluno ante desafios que lhe permitam desenvolver atitudes de responsabilidade, compromisso, crítica, satisfação e reconhecimento de seus direitos e deveres". (p. 27).

AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM

A avaliação é um momento fundamental no processo de ensino. Ela é um instrumento norteador do trabalho docente: "O que avaliar? Como avaliar?".

Esses questionamentos permitem ao professor identificar possíveis dificuldades dos alunos, podendo construir atividades para sua superação. A avaliação permite rever e redesenhar os caminhos para que a aprendizagem seja alcançada: e não vamos confundir a atribuição de uma nota com o acompanhamento do processo de aprendizagem visado.

Faz-se necessário o conhecimento dos alunos, de suas características relativas à aprendizagem matemática. É preciso identificar elementos que permitam ao professor estabelecer e reavaliar metas, processos, planejar atividades adequadas para a introdução, para o aprofundamento e para a avaliação da aprendizagem desses alunos. Cada um deles tem seu próprio ritmo que deve ser considerado: o tempo didático e o tempo cronológico não correm da mesma forma, o que muitas vezes explica dificuldades detectadas.

Não se trata de individualizar o ensino, mas de buscar as melhores formas de fazer a gestão das situações de aprendizagem e, em paralelo, das situações de avaliação. Estas acontecem continuamente, a cada aula, a cada momento.

Vários são os instrumentos que permitem ao professor obter as informações necessárias para o melhor planejamento, assim como atender à necessidade de quantificação da aprendizagem: atribuir uma nota ou um conceito. Destaca-se a importância da utilização de vários instrumentos simultaneamente, de forma a melhorar as oportunidades para que o aluno mostre efetivamente o que aprendeu (ou não aprendeu e precisa ser retomado pelo professor). Por exemplo: provas, relatórios, autoavaliação, trabalhos em equipe etc.

Cabe ao professor, a partir do conhecimento de suas turmas, escolher os instrumentos mais adequados aos objetivos fixados em seu plano de ensino. Algumas dessas medidas são subjetivas, mas os critérios a serem utilizados devem ser explicitados aos alunos.

Busca-se assim "uma proposta de avaliação flexível, contínua e formativa, identificando os principais problemas que interferem na obtenção de resultados, despertando o interesse dos alunos em relação à aplicação prática dos conhecimentos matemáticos adquiridos, bem como interpretar as informações coletadas na pesquisa de campo". (OLIVEIRA, 2012, p. 2)[7]

Destaca-se a necessidade de não limitar a avaliação aos aspectos cognitivos, uma vez que a formação do aluno deve ser a mais completa: aspectos comportamentais, atitudinais, também são considerados. Lembramos que um objetivo a ser fixado é o de uma educação democrática, inclusiva, e a avaliação tem papel fundamental nesse processo.

Para a elaboração do plano de avaliação, deve-se considerar os objetivos anunciados para cada unidade e o objetivo geral do ensino da Matemática em cada um dos níveis de escolaridade. Uma listagem desses objetivos permite sua operacionalização e, a partir daí, escolhem-se os melhores instrumentos.

7 OLIVEIRA J. C. G. *Os novos paradigmas para uma avaliação do ensino matemático*. Disponível em: <www.uems.br/eventos/semana2012/arquivos/49_2012-09-28_15-29-18.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2015.

Veja a seguir uma sugestão de listagem, que considera não apenas os aspectos cognitivos específicos, mas também os atitudinais. Observe que a construção da autonomia é um objetivo perene, que acompanha toda a formação do aluno.

Meu aluno é capaz de:

- "enfrentar" a resolução do problema;
- entender o contexto das atividades propostas;
- compreender o texto das atividades propostas;
- explicitar o problema com suas palavras;
- selecionar dados da questão de forma autônoma;
- fazer uso adequado de calculadora e outros materiais de forma a buscar soluções para o que é proposto de forma autônoma;
- resolver o problema;
- verificar se a solução é adequada;
- trabalhar em grupo de forma colaborativa;
- trabalhar individualmente com autonomia;
- utilizar corretamente a linguagem matemática.

É importante também lembrar que uma leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais auxilia na listagem dos objetivos tanto cognitivos como atitudinais.

FORMAÇÃO DO PROFESSOR — SUGESTÕES DE LEITURA E *SITES*

A. Sugestões de leitura:

BARBEIRO, Eulália da Conceição. *A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita: uma análise dos erros e das dificuldades de alunos de 7º ano de escolaridade*. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8318/1/ulfpie043292_tm.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

BERNAL, Márcia Maria. *Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado*. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/86993/205628.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 maio 2015.

BORRALHO, A.; BARBOSA, Elsa. *Pensamento algébrico e exploração de padrões*. Disponível em: <www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

_____. CABRITA, I.; PALHARES, P.; VALE, I. *Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra*. Disponível em: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

BRANCO, Neusa Cristina Vicente. *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Disponível em: <repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

CAMPOS, Tania M. M.; SOUZA, Vera Helena G. de. *Resolução de desigualdades com uma incógnita: uma análise de erros*. Disponível em: <www.fisem.org/www/union/revistas/2008/14/Union_014_007.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

COLLARES, Bruno Marques; LIMA, Diego Fontoura. *Por que inverter o sinal da desigualdade em uma inequação?* Disponível em: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE38.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. *O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do GeoGebra: um estudo com professores de Matemática*. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p246/23464>. Acesso em: 29 maio 2015.

_____. *Desenvolvimento do pensamento estatístico e sua articulação com a mobilização de registros de representação semiótica*. Disponível em: <www.redalyc.org/pdf/2912/291222099009.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

DAMBROS, Vanessa de Fátima Custódio; ARAÚJO, Viviane Raupp Nunes de. *O ensino de equações do primeiro grau: a busca pela superação da tricotomia entre aritmética, álgebra e geometria*. Disponível em: <www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2010/Educacao_em_Ciencias_e_Matematica/Trabalho/08_00_14_O_ENSINO_DE_EQUACOES_DO_PRIMEIRO_GRAU__A_BUSCA_PELA_SUPERACAO_DA_TRICOTOMIA_ENTRE_ARITMETICA,_ALGEBRA_E_GEOMETRIA.PDF>. Acesso em: 29 maio 2015.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. *Pensamento aritmético e pensamento algébrico no Ensino Fundamental*. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_Groenwald_Claudia.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

HUMMES, Viviane Beatriz; NOTARE, Marcia Rodrigues. *Aprendizagem significativa de equações do 1º grau: um estudo de caso com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental*. Disponível em: <file:///C:/Users/User/Downloads/420-2348-1-PB.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

JÚNIOR, Dárcio Costa Nogueira. *Ensino de razão e proporção na perspectiva curricular da rede*. Disponível em: <www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T8_CC1664.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

LIMA, Duílio Tavares de. *Fichas temáticas: resolvendo equações do 1º grau*. Disponível em: <www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20130919095224.pdf?PHPSESSID=5b59a548f19a92caf50a35dc8b2fb0d4>. Acesso em: 29 maio 2015.

LOPES, Celi Aparecida Espasadin. *A probabilidade e a estatística no currículo de Matemática do Ensino Fundamental Brasileiro*. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/lem/publica/ce_lopes/prob_est.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

_____; MEIRELLES, Elaine. *Estocástica nas séries iniciais*. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MAGALHÃES, Adil Ferreira. *Uma sequência de atividades para ensinar (e aprender) inequações*. Disponível em: <www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/produtos_2013/Adil%20Ferreira.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MALAGUTI, Pedro Luiz; BALDIN, Yuriko. *Os números inteiros no Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.dm.ufscar.br/profs/dplm/osnumerosinteiros.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MANGILI, Leonardo Milioli. *Os jogos e os números inteiros*. Disponível em: <www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000031/00003194.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

MARTINI, Grasiela. *Estratégias de trabalho para a aprendizagem de operações com números inteiros*. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29143/000775907.pdf?sequence=1>. Acesso em: 29 maio 2015.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. *Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações*. Disponível em: <http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.021>. Acesso em: 29 maio 2015.

MEGID, M. A. B. A. Construindo Matemática na Sala de Aula: uma Experiência com os Números Inteiros. In: FIORENTINI, D. & MIORIM, M. A. (Org.) *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas: Editora Gráfica FE/Unicamp – Cempem, 2001, p. 144-187.

MENEGAT, Maristela Ferrari. *Uma nova forma de ensinar razão e proporcionalidade*. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31572/000783440.pdf?...1>. Acesso em: 29 maio 2015.

MIYASAKI, Dirce Mayumi. *Modelagem matemática e educação ambiental: possibilidades para o Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/359-4.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

NETO, Francisco Tavares da Rocha. *Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no Ensino Fundamental*. Disponível em: <www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/1440/1/2010_dis_ftrneto.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa.; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. *Álgebra e pensamento algébrico através da resolução de problemas*. Disponível em: <www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1318.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

POMMER, Wagner M. *Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em ℤ*. Disponível em: <www.uems.br/eventos/encontromatematica/arquivos/44_2012-08-26_18-35-53.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SCHMITIZ, Ilda; SCHNEIDER, Deborah Sandra Leal Guimarães. *A leitura de mundo através da estocástica: um olhar crítico da realidade, através da mídia e das tecnologias*. Disponível em: <www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_ilda_schmitz.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SILVA, Ana Claudia da. *Dificuldades de aprendizagem na resolução de problemas envolvendo equações do 1º grau*. Disponível em: <www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12008/AnaClaudiadaSilvaPetronilo.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

SILVA, Maria José Ferreira da. *As concepções de números fracionários*. Disponível em: <www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/def_mat_concepfracoes1.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

_____; ALMOULOUD, Saddo Ag. *As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte – todo*. Disponível em: <www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2105/1830>. Acesso em: 29 maio 2015.

SOUZA, Leandro de Oliveira; LOPES, Celi Aparecida Espasadin. *O ensino de estocástica por meio de simulação virtual*. Disponível em: <www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1021.pdf>. Acesso em: 29 maio 2015.

B. *Sites*

- Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>.
- Sociedade Brasileira de Matemática (SBM): <http://www.sbm.org.br/>.
- Portal do Professor – MEC: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>.
- Centro de Referência em Educação Mário Covas: <www.crmariocovas.sp.gov.br/>.

C. Laboratórios de Educação Matemática (fonte: <www.leoakio.com/laboratorio-de-matematica.html>.)

- UFRJ - LIMC - Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências: <http://limc.ufrj.br/>.
- UFF - Conteúdos Digitais para o ensino e a aprendizagem de Matemática e Estatística: <www.uff.br/cdme>.
- UFF - LEG - Laboratório de Ensino de Geometria: <www.uff.br/leg/>.

- UFF - LABEM - Laboratório de Educação Matemática: <www.uff.br/labem/>.
- UFSC - LEMAT - Laboratório de Estudos de Matemática e Tecnologias: <http://mtm.ufsc.br/lemat/Lemat.html>.
- Unesp LEM - Laboratório de Ensino de Matemática - Rio Claro: <www.rc.unesp.br/igce/pgem/gfp/lem/>.
- Unesp/IBILCE - Laboratório de Matemática - Ribeirão Preto: <www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/>.
- USP - LEM - Laboratório de Ensino de Matemática: <www.ime.usp.br/lem/>.
- Feusp - Laboratório de Matemática: <www2.fe.usp.br/~labmat/>.
- UFU - LeMat - Laboratório de Matemática: <www.matematica.facip.ufu.br/laboratorio.html>.
- UFG - LEMAT – Laboratório de Educação Matemática: <www.mat.ufg.br/lemat/>.
- FURB - LMF - Laboratório de Matemática: <www.furb.br/lmf>.
- Unijuí - RS - Laboratório Virtual de Matemática: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/>.
- UFPE - PE - Laboratório de Ensino da Matemática: <www.dmat.ufpe.br/extensao/sala_de_jogos.htm>.

Além desses *links*, diversas revistas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática são disponíveis para acesso livre, *on-line*. Por exemplo, no Portal do Professor, o *link* <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/materiais.html> permite acessar artigos, livros, periódicos, entre outros recursos. Basta buscar por publicações relativas à Matemática: na busca pela ferramenta de pesquisa no- *site* você terá como resultado diversos *links* para ajudá-lo com materiais, leituras etc.

No *site* da SBEM, você tem acesso à *Educação Matemática em Revista* <www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/emr>, contendo artigos destinados ao professor que ensina Matemática nos diversos níveis de escolaridade. Também tem acesso ao anúncio dos eventos organizados.

No *site* da SBM, você tem acesso ao *link* para a *Revista do Professor de Matemática* <www.rpm.org.br/>, para a revista *Professor de Matemática OnLine* <http://pmo.sbm.org.br/pmo-h.html> e outras publicações.

D. Programas de Pós-graduação *Stricto Sensu* (Mestrado e Doutorado): com essa lista, o professor pode se informar sobre possibilidades de mestrado e/ou doutorado em áreas afins ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

A lista com os programas recomendados e reconhecidos pela CAPES pode ser encontrada no *site* <http://conteudoweb.capes.gov.br/conteudoweb/ProjetoRelacaoCursosServlet?acao=pesquisarIes&codigoArea=90200000&descricaoArea=&descricaoAreaConhecimento=ENSINO&descricaoAreaAvaliacao=ENSINO#>.

PROGRAMA	IES	UF
CIÊNCIA TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO	CEFET/RJ	RJ
CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO	IFSUL	RS
DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS	UFPA	PA
DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA	UNESP/BAU	SP
EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES	UESB	BA

PROGRAMA	IES	UF
EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	UFSC	SC
EDUCAÇÃO E SAÚDE NA INFÂNCIA E ADOLESCÊNCIA	UNIFESP	SP
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS	UESC	BA
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFES	ES
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA	UFPR	PR
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFG	GO
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFPE	PE
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFRRJ	RJ
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	PUC/RS	RS
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - UFMT - UFPA - UEA	UFMT	MT
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS	UFPA	PA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UESC	BA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFJF	MG
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFOP	MG
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UFMS	MS
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	USS	RJ
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UNESP/RC	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	PUC/SP	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UNIBAN	SP
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E ENSINO DE FÍSICA	UFSM	RS
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA	UFPE	PE
EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA	UEM	PR
EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFG	GO
ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UEPB	PB
ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	UEL	PR
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAC	AC
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAL	AL
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFAM	AM
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFC	CE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFCE	CE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFMA	MA
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFU	MG
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UEPB	PB
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	CEFET/RJ	RJ
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFRN	RN
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFPEL	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UCS	RS

PROGRAMA	IES	UF
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	FUPF	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	ULBRA	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNIFRA	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	FUFSE	SE
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNICSUL	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	IFSP	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS	UNIVATES	RS
ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS	UFSCAR	SP
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	UFRN	RN
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	UNICENTRO	PR
ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA	FURB	SC
ENSINO DE MATEMÁTICA	UFRJ	RJ
ENSINO DE MATEMÁTICA	UFRGS	RS
ENSINO EM EDUCAÇÃO BÁSICA	UERJ	RJ
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFES	ES
ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	UFG	GO
ENSINO TECNOLÓGICO	IFAM	AM
ENSINO, HISTÓRIA E FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UFABC	SP
FORMAÇÃO CIENTÍFICA, EDUCACIONAL E TECNOLÓGICA	UTFPR	PR
FORMAÇÃO DOCENTE INTERDISCIPLINAR	UNESPAR	PR
MULTIUNIDADES EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNICAMP	SP
PRÁTICAS DE EDUCAÇÃO BÁSICA	CPII	RJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	UNIFRA	RS

Além desses, temos hoje no Brasil um mestrado profissional oferecido pela Sociedade Brasileira de Matemática, modalidade semipresencial.

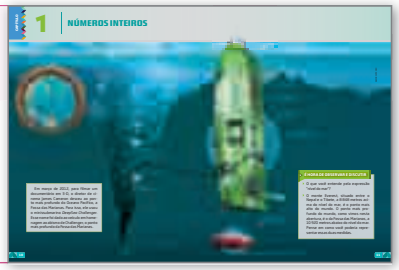
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT): www.profmat-sbm.org.br/	SBM	RJ

Outra possibilidade de formação para o professor de Matemática vem nos cursos de especialização, com pelo menos 360 horas, e que podem ser desenvolvidos presencialmente ou em modalidade a distância (mas com avaliações presenciais, de acordo com a legislação brasileira). Você pode buscar os cursos oferecidos em sua região. A informação é facilmente obtida na internet.

Orientações para o desenvolvimento dos capítulos

CAPÍTULO 1

Números inteiros



Conteúdos abordados

Números inteiros na reta numérica; módulo de um número inteiro; números opostos ou simétricos; comparação de números inteiros; adição de números inteiros e suas propriedades; subtração de números inteiros; multiplicação de números inteiros e suas propriedades; divisão exata de números inteiros; potenciação em que a base é um número inteiro e suas propriedades; raiz quadrada exata de números inteiros; expressões numéricas.

Objetivos

- Ampliar e construir significados para os números inteiros com base em sua utilização no contexto social.
- Resolver situações-problema envolvendo números inteiros e, a partir delas, ampliar e construir novos significados da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação.
- Ordenar números inteiros.
- Localizar números inteiros na reta numérica.
- Compreender o conceito de módulo de um número inteiro, relacionando-o à distância de um ponto da reta numérica até sua origem.
- Compreender a noção de números opostos ou simétricos, relacionando-os a pontos da reta numérica que estão a uma mesma distância da origem, mas em lados opostos da reta.
- Identificar e aplicar as propriedades das operações aritméticas (adição, multiplicação e potenciação) com números inteiros.
- Resolver expressões numéricas.

Orientações

Ao introduzir o estudo dos números inteiros, você pode levar os alunos a perceber, por meio de reflexões e da discussão de algumas situações, que os números que eles conhecem até agora (naturais e fracionários positivos) não são suficientes para trabalhar com todas as situações possíveis envolvendo informações numéricas. Se julgar conveniente, você pode incentivá-los a dar exemplos de números que fazem parte de um conjunto, mas não de outro, e a chegar a conclusões do tipo: "Todo número natural é um número inteiro, mas nem todo número inteiro é natural".

A situação apresentada nas páginas de abertura do capítulo (**páginas 10 e 11**) trata de medidas de altitude, tomando o nível do mar como referência (nível zero). Explora, especialmente, altitudes de pontos que estão abaixo do nível do mar, relacionando-as aos números inteiros negativos. Após responderem à última atividade proposta, você pode comentar com os alunos que o sinal de "menos" presente à frente da medida indica uma altitude abaixo do nível do mar.

Seguem situações que o livro destaca como sendo algumas nas quais os números inteiros podem estar presentes no dia a dia:

Altitude: não necessariamente os valores negativos para altitudes são valores inteiros. Você pode comentar isso com os alunos e reforçar a ideia de que os números inteiros não são suficientes para expressar todas as medidas.

Transações bancárias: é uma das situações mais importantes em que os números negativos estão presentes. Explore, sempre que possível, problemas envolvendo transações bancárias. É interessante propor situações nas quais as noções de saque, débito, crédito e saldo possam ser exploradas e mobilizadas, pois isso poderá contribuir para que os alunos atribuam significado às operações envolvendo números inteiros. Por meio dessas situações, pode-se dar início aos trabalhos com Educação Financeira, essencial para a formação dos estudantes como cidadãos capazes de interpretar informações bancárias e de administrar de forma eficiente seu dinheiro. Esse contexto das transações financeiras é bastante rico para a exploração dos números inteiros e de operações com esse tipo de número, mas, novamente, é preciso que você fique atento e enfatize para os alunos que essas transações não envolvem apenas valores inteiros. Por exemplo, um débito de R$ 1.532,51 pode ser associado ao número –1.532,51, que é negativo, mas não inteiro.

Saldo de gols: Diferentemente das outras situações, o saldo de gols de um time só pode ser expresso por um número inteiro, uma vez que não faz sentido um número não inteiro de gols. Você pode chamar a atenção dos alunos para esse fato e simular algumas situações em que eles devem determinar o saldo de gols de um time. Essa atividade preliminar poderá contribuir para que você faça um levantamento do conhecimento prévio dos alunos no que diz respeito à adição e à subtração envolvendo números inteiros.

A atividade 8 da **página 16** envolve leitura e interpretação de um gráfico de barras verticais. Você pode auxiliar os alunos a identificar o que representam o eixo horizontal e o eixo vertical. Pode-se também solicitar que identifiquem o mês em que a microempresa teve maior lucro ou maior prejuízo. Os gráficos auxiliam no tratamento de informações e estão bastante presentes no cotidiano dos alunos e, por esse motivo, saber lê-los e interpretá-los contribui para sua formação como cidadãos.

Você pode explorar com os alunos o significado da fala da personagem da **página 17**: "Cada número inteiro está associado a um único ponto da reta, mas nem todo ponto da reta está associado a um número inteiro". Pode-se propor aos alunos que deem exemplos de pontos da reta que não estão associados a números inteiros e que compartilhem suas respostas. Espera-se que eles percebam que qualquer ponto entre outros dois, que representam números inteiros consecutivos, não está associado a um número inteiro.

As atividades 2 e 3 da **página 17** são importantes, pois estimulam os alunos a fazer a conversão do registro em língua materna para o registro gráfico. É possível propor também atividades em que

eles possam fazer a conversão contrária, ou seja, que, a partir da localização de números inteiros na reta numérica, façam alguma descrição. Por exemplo, você pode representar em uma reta numérica os números inteiros -3, -2, -1, 0 e 1 e, em seguida, propor que escrevam no caderno uma frase associada a essa representação. Nesse caso, uma resposta possível seria: "números inteiros maiores que -4 e menores ou iguais a 1".

Ao trabalhar com a comparação de números inteiros, a tendência é que os alunos, em um primeiro momento, tenham dificuldade em compreender, por exemplo, que $-7 > -8$ ou $-5 < 2$, uma vez que confundem o número com o seu módulo. Por esse motivo, é importante estimulá-los a recorrer, sempre que necessário, à representação na reta numérica para realizar essas comparações, devido ao seu apelo visual.

Ainda no âmbito da comparação de números inteiros, é importante que, conforme a proposta do exercício 10 do item Aplicando da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 40 a 43)**, os alunos trabalhem com datas referentes a fatos ocorridos antes do nascimento de Cristo. Em diversas situações do cotidiano e especialmente na própria escola (nas aulas de História, por exemplo), eles precisarão saber lidar com datas expressas dessa forma e estabelecer comparações entre elas.

É recomendável, ao trabalhar adições com números inteiros, explorar a ideia de que, "quando juntamos dois prejuízos, obtemos um prejuízo; quando juntamos dois lucros, obtemos um lucro; e quando juntamos um prejuízo com um lucro, o resultado dependerá do valor absoluto de cada um". É importante incentivar os alunos a estimar resultados e antecipar qual será o sinal do resultado. Trata-se de uma maneira de associar estimativas a técnicas de cálculo. Você pode aproveitar a oportunidade e conversar sobre as vantagens de fazer previsões de resultados e quanto isso é usado em situações extraescolares.

Trabalhar as operações com números inteiros, bem como suas propriedades, por meio de situações contextualizadas, contribui para que os alunos evitem memorizar regras referentes aos sinais e atribuam significado aos cálculos realizados.

Na atividade 6 da **página 24**, você pode propor aos alunos que identifiquem nos procedimentos de Rita e Maísa onde foram usadas as propriedades comutativa, associativa, o elemento neutro e o elemento oposto da adição com números inteiros. Em seguida, pode-se chamar a atenção deles para que percebam que conhecer essas propriedades facilita e agiliza a realização de cálculos.

Ao trabalhar a subtração com números inteiros, é fundamental diferenciar o sinal do número e o sinal da operação, indicados pelo símbolo "$-$". Essa diferenciação é o primeiro passo para os alunos compreenderem como essas subtrações são efetuadas e em que situações podem ser utilizadas. Se achar necessário aprofundar a discussão sobre os sinais, você pode comparar a sentença:

$$(-1) - (+3) = -4$$

com esta:

$$(-1) + (-3) = -4$$

Em seguida, você pode chamar a atenção deles para o fato de que, apesar de as duas sentenças terem o mesmo resultado, na segunda, o sinal que aparece antes do 3 não é um sinal de subtração, mas o sinal do número, que indica que o 3 é negativo.

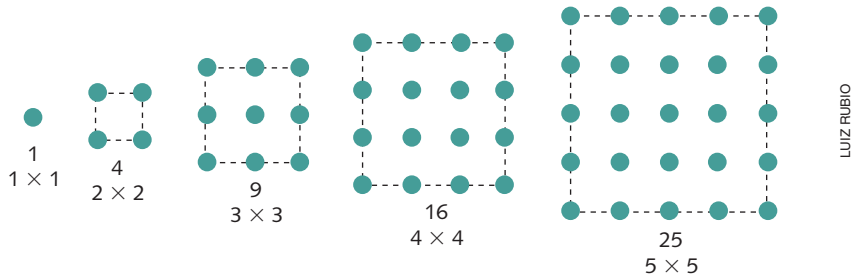
Situações como a da atividade 7 da **página 28**, que trata da noção de balança comercial, devem ser frequentemente exploradas, porque contribuem para a formação do aluno como cidadão, capacitando-o a interpretar e analisar informações amplamente veiculadas pelos meios de comunicação, mas nem sempre compreendidas pela maioria das pessoas. Por essa mesma razão, problemas envolvendo interpretação de gráficos e de tabelas também devem ser propostos sempre que possível.

Ao trabalhar multiplicações com números inteiros, é importante usar exemplos que permitam aos alunos compreender o fundamento das regras de sinais para evitar que sejam memorizadas

sem qualquer significado. A compreensão efetiva dessas regras é fundamental para que assimilem também o comportamento dos sinais em uma divisão de números inteiros, uma vez que é a operação inversa da multiplicação. Portanto, não fará sentido indicar, logo de início, que as regras de sinais para multiplicação e divisão são as mesmas. Essa deverá ser a conclusão final da turma.

As regras para potenciação em que a base é um número inteiro, bem como as propriedades dessa operação, devem ser justificadas a partir da própria definição de potenciação (multiplicação de fatores iguais).

Aproveite a observação feita na **página 37** a respeito dos números inteiros quadrados perfeitos e mostre aos alunos uma representação figural desses números. Por exemplo, para 1, 4, 9, 16 e 25, temos:



O esquema de resolução da situação-problema proposta na seção *Resolvendo em equipe*, da **página 39**, pode ser explorado constantemente durante as aulas de Matemática, e não apenas nessa situação. É importante que o aluno, seja sozinho ou com outros colegas, tenham clareza a respeito de como podem proceder para interpretar, resolver e verificar a validade da solução encontrada ao trabalhar com um problema matemático.

É muito importante explorar com cuidado a atividade 9 do item Aplicando, da seção *Trabalhando com os conhecimentos adquiridos* (**páginas 40 a 43**), porque é a primeira questão envolvendo atribuição de valores para determinada variável, ideia que será fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Deve ficar claro para os alunos que o valor numérico das expressões $x + y - z$, $x - z$ e $x - z + y$ depende dos valores atribuídos às variáveis x, y e z.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 2

Números racionais

Conteúdos abordados

Números racionais; representação dos números racionais na reta numérica; módulo de um número racional; oposto de um número racional; comparação de números racionais; adição e subtração de números racionais; multiplicação de números racionais; divisão de números racionais; potenciação de números racionais e suas propriedades; raiz quadrada de números racionais; expressões numéricas.

Objetivos

- Ampliar e consolidar os significados dos números racionais com base nos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais.
- Resolver situações-problema envolvendo números racionais, ampliando e consolidando o significado de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.
- Ordenar números racionais.
- Localizar números racionais na reta numérica.
- Compreender o conceito de módulo de um número racional, relacionando-o à distância de um ponto da reta numérica até a origem.
- Compreender a noção de números racionais opostos ou simétricos, relacionando-os a pontos da reta numérica que estão à mesma distância da origem, mas em lados opostos da reta.
- Aplicar as operações envolvendo números racionais na resolução de problemas.
- Resolver expressões numéricas.

Orientações

Explore inicialmente a situação de abertura do capítulo (**páginas 44 e 45**), na qual os alunos são levados a classificar os números presentes nela considerando os conjuntos numéricos já estudados. Na sequência, antes mesmo de trabalhar a seção *Trocando ideias* (**página 46**), pode-se propor aos alunos que deem alguns exemplos de outras situações nas quais a utilização apenas de números naturais, de números inteiros e de números fracionários positivos não é suficiente. Isso lhes permitirá inferir quais são os outros tipos de números que os alunos conhecem (uma vez que outros conjuntos numéricos possivelmente ainda não foram formalmente estudados por eles).

Visando apresentar pela primeira vez exemplos de números fracionários negativos, pode-se retomar a situação de abertura do capítulo anterior, relativa à medição de altitudes a partir do nível do mar (considerado como nível zero) e considerar, por exemplo, um ponto que está 0,5 m abaixo do nível do mar. É mais uma oportunidade de destacar que, em razão de o objetivo do capítulo anterior ser o estudo dos números inteiros, naquela ocasião foram consideradas apenas medidas inteiras para altitudes, mas que, na prática, não é isso que ocorre, como deve ficar claro a partir do estudo realizado neste capítulo.

Após essa introdução à temática do capítulo, mas antes de iniciar, de fato, o estudo do conjunto dos números racionais, é interessante propor aos alunos algumas atividades de revisão, retomando pontos principais a respeito dos números fracionários, como a noção de fração, a comparação de números fracionários, como escrever números decimais na forma fracionária (e também números fracionários na forma decimal) e as principais operações com frações. Essas ideias são todas fundamentais para o estudo a ser realizado neste capítulo e, portanto, é importante que os alunos as tenham em mente para mobilizá-las sempre que necessário.

Ao mostrar que há números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π etc. que não podem ser escritos na forma de fração, é importante salientar que os valores fornecidos pela calculadora ou pelo computador para cada um desses números é uma aproximação, e não o seu valor exato. Se aquele valor mostrado pela calculadora fosse, de fato, o valor exato do número, então ele poderia ser escrito na forma de fração e seria, portanto, racional. Essa reflexão é relevante para que os alunos evitem construir ideias equivocadas a respeito dos números irracionais (que serão estudados posteriormente) e não confundam esses números com uma de suas aproximações.

É possível, antes de introduzir a representação do conjunto dos números racionais na reta numérica, explorar as diversas situações propostas na atividade 4 da **página 48**. Trabalhar com essas ideias pode contribuir para que os alunos estabeleçam alguns referenciais, por exemplo, identificar entre quais inteiros está um racional dado e, consequentemente, representar números racionais na reta numérica sem dificuldades.

Trabalhar a representação dos números racionais na reta numérica pode contribuir para que os alunos percebam uma diferença fundamental entre esses números e os números inteiros: enquanto entre dois números inteiros consecutivos não há outro número inteiro, entre dois números racionais quaisquer, por menor que seja a diferença entre ambos, sempre há infinitos números racionais. Não é possível, portanto, no conjunto dos números racionais, estabelecer um sucessor ou um antecessor para um de seus elementos. Veja um exemplo de atividade que pode levar os alunos a esse tipo de reflexão:

(i) No conjunto dos números naturais, entre 7 e 9 só há o número 8; e entre $\frac{7}{12}$ e $\frac{9}{12}$, só existe o $\frac{8}{12}$?

(ii) Escreva um número racional que seja maior que $\frac{7}{12}$ e menor que $\frac{9}{12}$.

(iii) Encontre um número racional que seja maior que $\frac{7}{12}$ e menor que a, sendo $a > \frac{7}{12}$.

(iv) Mostre que, entre dois números racionais distintos quaisquer x e y, com $x < y$, sempre existe algum número racional diferente deles.

Essa atividade é interessante também por possibilitar, no item *iv*, que os alunos desenvolvam algum tipo de trabalho com ideias relativas à argumentação e à prova.

A atividade 3 da página 51 deve ser bem compreendida pelos alunos, porque essa ideia de que para cada valor de módulo há dois números opostos associados será mobilizada em diferentes situações a serem vistas por eles em sua trajetória escolar.

Ao trabalhar comparações de números racionais, deve-se verificar a possibilidade de retomar, mais uma vez, aquilo que foi desenvolvido ao comparar números fracionários e números inteiros para que, ao realizar essas comparações, os alunos não se baseiem apenas nos valores absolutos dos inteiros ou dos denominadores e numeradores dos números racionais e, em razão disso, construam ideias equivocadas.

Ao trabalhar as operações com números racionais, retome, se possível, os pontos principais discutidos no estudo das operações com frações e com números inteiros, enfatizando sempre os fundamentos dessas operações e nunca a memorização de regras e de procedimentos não compreendidos e sem significado para os alunos.

O exercício 9 do tópico 6, *Adição e subtração de números racionais*, o exercício 4 do tópico 8, *Divisão de números racionais* , e a situação introdutória do tópico 9, *Potenciação de números racionais*, exigem dos alunos a conversão de registros em língua materna (língua portuguesa) para o registro numérico. Sempre que possível, você pode explorar situações desse tipo, uma vez que esse processo é fundamental em Matemática e, em geral, os alunos apresentam bastante dificuldade em realizá-lo.

Exercícios que envolvem, ao mesmo tempo, cálculos com números racionais escritos na forma decimal e outros escritos na forma fracionária também costumam gerar dificuldades para os alunos e devem ser explorados com cuidado, para que eles sejam capazes, efetivamente, de trabalhar com ambas as representações em uma mesma situação.

Aproveite a seção *Lendo e aprendendo* da **página 54** e proponha, juntamente com o professor de Língua Portuguesa, que os alunos leiam o livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan (pseudônimo de Júlio César de Mello e Souza). Após a leitura, cada área pode explorá-la da maneira mais interessante em relação a seus objetivos específicos.

As atividades 6 e 21 do item Aplicando da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 66 a 69**) exigem que os alunos reflitam e encontrem estratégias para resolvê-las. Após realizarem essas atividades, proponha que compartilhem suas estratégias com os colegas para que possam ampliar o seu repertório.

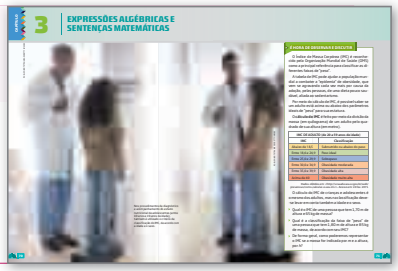
As atividades 7 e 17 da mesma seção são importantes por explorarem, respectivamente, a leitura e a interpretação de gráfico e tabela, algo essencial para a formação do aluno como cidadão capaz de analisar e refletir, de maneira crítica, a respeito de informações divulgadas pelos meios de comunicação.

O exercício 18, também dessa seção, por sua vez, trabalha com unidades de medida de capacidade de armazenamento de equipamentos eletrônicos (*byte*), algo que, cada vez mais, faz parte do cotidiano dos alunos e com o que, consequentemente, eles devem saber lidar de maneira eficiente. É importante então explorar, sempre que possível, situações envolvendo contextos semelhantes a esse.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 3

Expressões algébricas e sentenças matemáticas



Conteúdos abordados

Expressões algébricas; valor numérico de uma expressão algébrica; termos algébricos (termos semelhantes e redução de termos semelhantes); sentenças matemáticas (sentenças verdadeiras e falsas).

Objetivos

- Reconhecer que as representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções.
- Utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.
- Entender o que é um termo algébrico, bem como reconhecer e operar com termos algébricos semelhantes, a fim de obter expressões equivalentes a uma expressão dada.
- Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas; expressões e igualdades.

Orientações

A situação apresentada na abertura do capítulo (**páginas 70** e **71**) trata do Índice de Massa Corpórea (IMC). A partir dessa situação é possível propor aos alunos que conversem sobre por que, na opinião deles, esse índice é importante. Pode-se comentar que a fórmula para o cálculo desse índice só é válida para adultos e que outros fatores devem ser considerados antes de chegar a qualquer conclusão a respeito das condições de saúde de uma pessoa. Após essa conversa, você pode pedir para que apresentem exemplos de outras situações que conhecem e que envolvem expressões como a que foi obtida para representar o IMC.

Sugere-se, conforme indicam as pesquisas atuais da área de Educação Matemática, que a observação de padrões seja guia para a introdução da linguagem algébrica. Atividades envolvendo a observação e, posteriormente, a generalização de padrões devem permear todo o estudo da Matemática – considerada por muitos a ciência dos padrões –, especialmente a introdução da Álgebra. Recomenda-se, então, que sejam propostas diversas situações envolvendo generalização de padrões antes de dar início, de fato, à conceitualização de expressões algébricas, para que os alunos percebam a sua utilidade em diferentes contextos antes de estudá-las formalmente.

É fundamental levar os alunos a refletir a respeito dos significados assumidos pelas letras que aparecem nas expressões algébricas em cada uma das situações exploradas no livro, especialmente nos exemplos e exercícios do tópico 1, em que é trabalhado o conceito de expressão algébrica. A compreensão desses significados é essencial para que os alunos possam ter sucesso em seus estudos futuros de Matemática, que, cada vez mais, exigirão a utilização e o domínio da linguagem algébrica.

As atividades 2 e 4 da **página 74**, bem como o desafio do item Aplicando da seção *Trabalhando com os conhecimentos adquiridos* (**páginas 80** e **81**), solicitam que os alunos, ao trabalharem com situações geométricas, explicitem medidas em termos de outras medidas dadas. Esse tipo de atividade merece atenção especial, pois traduzir por meio de uma expressão algébrica uma medida ou uma situação-problema será uma das competências exigidas durante a trajetória escolar.

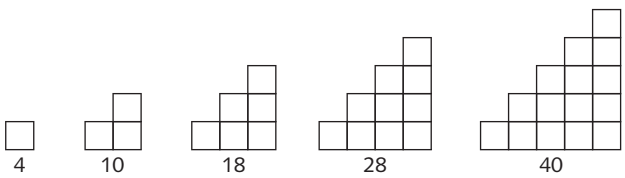
A ideia de redução de termos semelhantes deve ser trabalhada de forma atenta e cuidadosa, para que os alunos possam efetivamente compreender esse procedimento, que os acompanhará durante todos os estudos de Matemática e de outras disciplinas da área de Ciências Exatas que, de alguma forma, fazem uso da linguagem algébrica. É fundamental que os alunos percebam que não podem operar com termos que não sejam semelhantes para reduzi-los a um único termo, engano bastante comum entre os estudantes nos primeiros momentos do trabalho com a Álgebra.

É importante explorar com os alunos a conversão de sentenças matemáticas da língua materna (língua portuguesa) para a linguagem algébrica e vice-versa. A apreensão conceitual em Matemática só é possível quando os alunos mobilizam no mínimo duas representações diferentes do mesmo conceito.

A ideia de máquina de operações matemáticas, presente no exercício 4 do item Aplicando da seção *Trabalhando com os conhecimentos adquiridos*, pode ser explorada em outros momentos, uma vez que o raciocínio envolvido nessa ideia será fundamental para o estudo de funções no 9º ano.

Da mesma forma que é interessante iniciar o estudo das expressões algébricas por meio da discussão de situações envolvendo observação e generalização de padrões, esse tipo de atividade pode ser utilizado também no final do capítulo, para que, a partir da percepção de regularidades, os alunos possam estabelecer generalizações e, nesse processo, mobilizar os conhecimentos construídos ao longo do capítulo. Segue uma sugestão de atividade que pode ser proposta:

Investigue a relação entre a ordem n da figura e o número total a_n de segmentos unitários usados nos desenhos.



LUIZ RUBIO

Sugira aos alunos uma abordagem por tentativa e erro. Eles deverão obter a fórmula de recorrência $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2(n+1), \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1 \end{cases}$

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 4

Equações do 1º grau com uma incógnita

Conteúdos abordados

Equações; raiz de uma equação (conjunto universo e solução de uma equação); resolução de equações do 1º grau com uma incógnita; resolução de problemas.

Objetivos

- Compreender o que é uma equação e o que é uma incógnita.
- Entender o significado de raiz de uma equação.
- Compreender os conceitos de conjunto universo e solução de uma equação.
- Entender o que são equações equivalentes e como obter, a partir de uma equação dada, por meio do princípio aditivo ou multiplicativo das igualdades, equações equivalentes a ela.
- Compreender o que significa resolver uma equação e quais procedimentos utilizar para isso.
- Mobilizar os conhecimentos construídos ao longo do capítulo para resolver problemas envolvendo equações do 1º grau com uma incógnita.

Orientações

A fim de dar condições para que os alunos comecem a se familiarizar com a temática a ser estudada, pode-se propor que, em duplas, realizem as atividades sobre a máquina envasadora da abertura do capítulo (**páginas 82** e **83**) e as do problema do sábio e das moedas da seção *Trocando ideias* (**página 84**). É possível aproveitar a oportunidade para avaliar as possíveis dificuldades dos alunos no que se refere à compreensão das questões propostas e à tradução das situações-problema por meio de uma sentença matemática.

Antes de trabalhar o tópico 1, que trata do conceito de equação, você pode retomar alguns aspectos referentes às sentenças matemáticas que já foram trabalhados no Capítulo 3 e algumas situações que podem ser traduzidas por meio dessas sentenças. Aliás, representar por meio de sentença matemática uma situação-problema apresentada é o primeiro passo para que os alunos possam resolver os problemas envolvendo equações do 1º grau com uma incógnita.

Ao ilustrar, pela primeira vez, a ideia de igualdade entre dois membros de uma sentença matemática por meio do equilíbrio de uma balança de dois pratos, é fundamental que os alunos saibam como funciona esse tipo de balança. Embora essa associação entre uma equação e a imagem de uma balança de dois pratos em equilíbrio seja bastante clássica e com potencialidades didáticas, é preciso levar em consideração que esse tipo de balança não faz mais parte do cotidiano dos alunos, uma vez que agora são utilizadas predominantemente as balanças eletrônicas. Se possível, leve uma dessas balanças (ou ao menos uma réplica) para a sala de aula para que eles possam manipulá-la e entender o seu funcionamento.

A partir do momento em que introduzir a noção de incógnita, atente ao uso de diferentes letras para representar um número desconhecido. Em razão de muitos professores usarem apenas a

letra x para tal representação, diversos alunos acabam interiorizando equivocadamente a ideia de que essa é a única forma possível de denotar uma incógnita, chegando, até mesmo, a apresentar dificuldades em trabalhar com situações nas quais são utilizadas outras letras. Os alunos devem perceber, desde o primeiro contato com esse conteúdo, que não há restrições em relação a qual letra deve ser usada para a representação, e que a letra escolhida não tem qualquer influência na solução do problema que está sendo considerado.

É importante explorar situações como as que aparecem em diversos momentos do capítulo, nas quais os alunos não devem somente resolver uma equação, mas analisar sentenças matemáticas apresentadas: verificar se elas são, de fato, equações, se possuem incógnitas e, se possuírem, quais são elas etc. Da mesma forma, ao trabalhar as resoluções de equações, estimule-os, com os exemplos e exercícios presentes no livro, a compreender o que significa um número ser raiz de uma equação e a analisar se alguns números dados são ou não raízes de determinadas equações. A compreensão efetiva das noções trabalhadas é tão importante quanto o domínio do procedimento de resolução de uma equação pelos alunos. Abrir mão da compreensão dessas noções pode levá-los a ter uma compreensão apenas parcial da temática que está sendo estudada.

Para auxiliar os alunos a compreender a noção de conjunto universo, é importante que eles percebam que os valores que a incógnita pode assumir depende, muitas vezes, do contexto em que a equação foi obtida. Na situação apresentada pelo livro para introduzir a ideia de conjunto universo, a incógnita x representa a quantidade de irmãos e, portanto, só pode assumir valores naturais. Assim, uma equação pode ou não ter raiz, dependendo do seu conjunto universo. Por exemplo, a equação $2x + 1 = 0$ não possui raiz, se o conjunto universo for o conjunto dos números inteiros, porém, se o conjunto universo for o conjunto dos números racionais, essa equação possui uma raiz igual a $-\frac{1}{2}$, pois $2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$. Pode-se propor aos alunos que inventem equações com uma incógnita em dado conjunto universo e troquem com um colega para que este encontre, quando possível, a sua raiz por tentativa e erro.

É importante chamar a atenção dos alunos para o seguinte: o fato de as equações possuírem as mesmas raízes não é suficiente para afirmar que são equações equivalentes, pois ambas devem ter também o mesmo conjunto universo. Assim, por exemplo, as equações $3x + 3 = 0$, sendo $U = \mathbb{Z}$, e $x + 1 = 0$, sendo $U = \mathbb{Q}$, possuem raiz igual a -1, mas, como não possuem o mesmo conjunto universo, não podemos afirmar que são equações equivalentes.

A atividade 3 da **página 90**, que trata de equações equivalentes, é importante por possibilitar que, ao ter de avaliar, com base nas soluções de diferentes equações, quais delas são equivalentes, os alunos trabalhem efetivamente o conceito. Sempre que possível, trabalhe situações que envolvem análises para evitar que haja uma supervalorização de exercícios de cálculo.

Ao trabalhar com resoluções de equações, explore, cuidadosamente, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo das igualdades. Esses princípios é que deverão fundamentar o processo de obtenção de solução de uma equação do 1º grau com uma incógnita. A compreensão desses princípios e de como utilizá-los deve substituir a ênfase em técnicas desprovidas de significados. É interessante, nos primeiros exemplos e exercícios referentes à obtenção da solução de uma equação, que você peça aos alunos que justifiquem cada um de seus passos, para que se conscientizem a respeito das propriedades e dos princípios que estão utilizando e como eles estão sendo mobilizados. Tenha sempre em mente que, em um primeiro momento, essa análise é mais importante do que simplesmente obter a solução correta.

Ao propor exercícios envolvendo a resolução de equações, é importante incentivá-los a refletir sobre a resposta alcançada, seja com base no conjunto universo considerado, seja à luz do contexto do problema que originou a equação. Isso vai contribuir para que evitem apresentar respostas de maneira automática.

Problemas envolvendo equações devem ser amplamente explorados durante as aulas para que os alunos possam, de fato, adquirir domínio dos processos de interpretar e "matematizar" uma situação apresentada, encontrar uma solução (se houver) e analisar o resultado obtido (se é coerente ou não com o contexto considerado, por exemplo). Inicialmente, os problemas propostos devem ser resolvidos mentalmente, por tentativa e erro ou por meio de esquemas. Tais estratégias devem ser incentivadas a fim de evitar que os alunos fiquem reféns da Álgebra, de modo que consigam resolver um problema com o uso de equações, inequações etc. É a partir da resolução de problemas que eles mobilizarão os conhecimentos apreendidos e revelarão suas dificuldades. Procure identificá-las e retome algum conceito, se julgar necessário. Reserve um tempo da aula para que compartilhem o raciocínio e as respostas alcançadas com os colegas, pois isso contribui para que ampliem seu repertório de estratégias e procedimentos utilizados.

Ao resolver um problema, os alunos devem ser sempre estimulados a recorrer a diferentes estilos de argumentação e de raciocínio. Devem, por exemplo, sempre que possível, além de recorrer a procedimentos algébricos, buscar figuras ou representações gráficas para as situações que estão sendo consideradas. Além disso, é importante que você os oriente a respeito de como elaborar estratégias para resolver um problema e como organizar essa resolução.

Aproveitando a discussão trazida pela seção *Lendo e aprendendo* (**página 97**) sobre escalas termométricas, solicite que os alunos busquem, na internet, informações a respeito do uso e das origens dessas escalas e que depois compartilhem com os colegas o resultado obtido.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 5

Inequações do 1º grau com uma incógnita

Conteúdos abordados

Desigualdades (algumas propriedades e conceito de inequação); inequações equivalentes; resolução de uma inequação do 1º grau.

Objetivos

- Compreender as propriedades de uma desigualdade e saber mobilizá-las para resolver problemas.
- Compreender o conceito de inequação e suas aplicações.
- Identificar inequações equivalentes e saber como obter, a partir de uma inequação dada, inequações equivalentes a ela.
- Compreender o que significa resolver uma inequação e quais procedimentos utilizar para isso.
- Mobilizar os conhecimentos construídos ao longo do capítulo para resolver problemas envolvendo inequações do 1º grau com uma incógnita.

Orientações

Inicialmente, é possível propor aos alunos que discutam em duplas a situação apresentada nas páginas de abertura (**páginas 104** e **105**) do capítulo e que apresentem exemplos de situações, não necessariamente ligadas aos esportes, nas quais a utilização de desigualdades se faz necessária. Em seguida, essas situações podem ser compartilhadas e discutidas com toda a classe. Atividades desse tipo permitem que os alunos se familiarizem com os tipos de problemas que vão estudar ao longo do capítulo que está sendo iniciado.

A atividade 3 da **página 111**, na qual o aluno deve associar uma inequação a cada situação proposta, é bastante importante, e deve ser bem explorada. A realização desse tipo de tarefa será fundamental para que os alunos possam interpretar corretamente as situações-problema envolvendo inequações do 1º grau, como as que são propostas nas atividades 4 e 6 da **página 111**, 4 e 5 da **página 115**, 13, 16 e o desafio do item Aplicando da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 116** e **117**).

Explore ampla e cuidadosamente as propriedades e os princípios aditivos e multiplicativos das desigualdades. Afinal, essas propriedades e princípios vão fundamentar o processo de obtenção de solução de uma inequação do 1º grau com uma incógnita. A compreensão desses princípios e de como utilizá-los deve substituir a ênfase em técnicas desprovidas de significados para os alunos.

Sempre que necessário, é possível recorrer à representação na reta numérica para que os alunos se convençam da necessidade de mudar o sentido de uma desigualdade ao multiplicar ambos os membros por um número negativo.

Nos primeiros exercícios referentes à obtenção do conjunto solução de inequações do 1º grau com uma incógnita, é interessante pedir que os alunos justifiquem cada um de seus passos para

que se conscientizem a respeito das propriedades e princípios que estão utilizando e como eles estão sendo mobilizados. Essa análise é mais importante, nesse primeiro momento, do que simplesmente obter a solução correta.

Ao contrário do que ocorre nos exercícios em que os estudantes devem simplesmente resolver uma inequação, nos problemas, em geral, o conjunto universo não é apresentado explicitamente. Por esse motivo, é importante incentivá-los a refletir sobre a resposta alcançada e avaliar se ela satisfaz as condições do problema.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 6

Ângulos

Conteúdos abordados

O ângulo e seus elementos; medida de ângulo (uso do transferidor para medir e construir ângulos e classificação em reto, agudo e obtuso); transformação de unidades (grau, minuto e segundo); operações com medidas de ângulos; ângulos congruentes, ângulos adjacentes; bissetriz de um ângulo; ângulos complementares, ângulos suplementares; ângulos opostos pelo vértice.

Objetivos

- Compreender o conceito de ângulo e reconhecê-lo em objetos do mundo real.
- Medir e construir ângulos utilizando um transferidor.
- Identificar ângulos retos, agudos e obtusos.
- Compreender e operar com medidas de ângulos.
- Identificar ângulos congruentes, adjacentes, complementares, suplementares e opostos pelo vértice, bem como compreender suas propriedades.
- Compreender e construir a bissetriz de um ângulo com régua e compasso.

Orientações

A seção *Trocando ideias* (**página 120**) possibilita explorar o conhecimento prévio dos alunos no que se refere à classificação de ângulos quanto à sua medida (reto, agudo e obtuso) e também verificar se eles já apresentam familiaridade com o uso do transferidor. Esse conhecimento é muito importante para o planejamento das próximas aulas.

É fundamental que, em diversas situações, você procure incentivar a observação do entorno dos alunos (paredes, carteiras, livros, tesouras etc.), assim como propor atividades que utilizem o próprio corpo deles, solicitando que façam giros de determinados ângulos a fim de verificarem a importância concreta do conceito de ângulo.

Antes de iniciar o tópico 1, que trata do conceito de ângulo e seus elementos (lados e vértice), você pode comentar que, em geral, usamos as letras minúsculas do alfabeto grego para representar os ângulos. Se julgar conveniente, mostre algumas dessas letras para os alunos. É importante levar em consideração que a definição de ângulo não é única e que, em diversos materiais didáticos, o ângulo é definido como a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Caso algum material utilizado na escola apresente essa outra definição, esteja atento para resolver possíveis dúvidas relacionadas a isso.

No tópico 2, que trata de medida de ângulos, é fundamental que os alunos realmente efetuem medições e construam ângulos utilizando um transferidor, que poderá ser solicitado de antemão ou levado à sala de aula por você. Chame a atenção dos alunos para o fato de que o transferidor é graduado nos dois sentidos e que, por esse motivo, é importante que prestem atenção ao sentido com que querem identificar o ângulo.

Como aparecem indicações de ângulos medindo 45°50', é importante alertá-los sobre a impossibilidade de uso do transferidor nesses casos. Na atividade 5 da **página 128** eles vão verificar um ângulo de 195° e é importante comentar que ângulos com medida superior a 180° e inferior a 360° não se enquadram nas classificações estudadas até então.

É possível conduzir as discussões de modo que estejam sempre atreladas às estimativas dessas medidas. Tomando como referencial um ângulo reto, ou seja, ângulo de medida igual a 90°, os alunos poderão, em geral, classificar qualquer ângulo quanto à sua medida sem o uso do transferidor. Além disso, quando precisarem realizar medições e/ou construções de ângulos, poderão reduzir seus erros usando esse referencial.

O conceito de ângulos congruentes é trabalhado no tópico 5 e é comum os alunos abusarem da linguagem e referir-se a ângulos congruentes como "iguais". Caso isso aconteça, é possível apresentar exemplos de ângulos distintos que possuam mesma medida e assim chamar a atenção deles para que percebam que os ângulos representados são congruentes, mas não iguais.

Outro equívoco bastante comum cometido pelos alunos ao comparar ângulos é levar em consideração as medidas dos lados, e não sua abertura. Assim, mesmo que dois ângulos possuam mesma medida, eles acabam concluindo que um é maior que o outro com base na medida de seus lados. Esse tipo de engano pode ocorrer por dois motivos: o primeiro é a não compreensão do conceito de ângulo, e o segundo é não atentar para o fato de que os lados do ângulo são formados por semirretas de mesma origem e que, portanto, estão medindo algo (semirreta) que é ilimitado em um dos sentidos. As ilustrações dos ângulos *AÔB* e *CÔD* do início do tópico sugerem essa discussão.

A construção da bissetriz de um ângulo utilizando régua e compasso, no tópico 7, permite que os alunos percebam a possibilidade de construir ângulos sem o auxílio de um transferidor. Você pode propor a eles que construam um ângulo de 45° a partir de um ângulo reto ou ângulos de 30° e 15° a partir do ângulo de 60°.

O desenvolvimento da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 144** e **145**) pode ser o momento oportuno para identificar as dificuldades dos alunos e retomar algum conceito, se necessário. Você pode incentivá-los a compartilhar suas respostas e estratégias para que ampliem seu repertório.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 7

Razão

Conteúdos abordados

Razão entre grandezas de mesma natureza e a ideia de escala; razão entre grandezas de naturezas diferentes (consumo médio, velocidade média, densidade demográfica e densidade de um corpo).

Objetivos

- Compreender o conceito de razão.
- Compreender a noção de razão entre grandezas de mesma natureza.
- Entender a ideia de escala e sua aplicação em plantas baixas, maquetes, miniaturas e mapas.
- Compreender a noção de razão entre grandezas de naturezas diferentes e o significado de algumas razões especiais, como consumo médio, velocidade média, densidade demográfica e densidade de um corpo.

Orientações

Desde a situação de abertura do capítulo (**páginas 146** e **147**), é importante procurar deixar claro aos alunos que as razões estabelecem comparações entre duas quantidades, que podem ser de mesma natureza ou de naturezas diferentes. A situação apresentada nas páginas de abertura desse capítulo oferece a oportunidade para que verifiquem, por meio de uma razão, quanto o diâmetro das rodas traseiras é maior que o diâmetro das rodas dianteiras de uma retroescavadeira. Essa situação, em particular, exemplifica uma razão entre grandezas de mesma natureza. Você pode solicitar aos alunos que citem exemplos de razões que envolvem grandezas de naturezas diferentes, pois isso poderá ajudar a fazer um levantamento do conhecimento prévio deles acerca desse conteúdo.

Além de trabalhar com os exemplos apresentados no primeiro tópico do capítulo, para que os alunos possam, de fato, apropriar-se da ideia de razão, é possível incentivá-los a observar outras situações nas quais essa noção está presente (você pode sugerir, por exemplo, que eles procurem informações em embalagens de produtos que precisam ser diluídos antes da utilização em receitas culinárias etc.).

Aproveite o estudo de razões e os problemas nos quais esse conceito está presente para retomar com os alunos ideias já trabalhadas a respeito de números fracionários, como frações equivalentes, frações irredutíveis, representação de números racionais na forma decimal etc.

A atividade 1 da **página 150** pede que os alunos representem, por meio de uma razão, a situação descrita em cada uma das frases. Atividades como essa, em que há aproximação entre a língua materna e a linguagem matemática, podem contribuir para que os alunos atribuam significado ao conceito em questão e que percebam quão presente a matemática pode estar em sua vida.

É importante explorar com os alunos as diferentes maneiras de expressar uma razão (fração irredutível, número decimal e porcentagem). É preciso fornecer-lhes condições para que possam compreender, em seu dia a dia, informações numéricas apresentadas de maneiras diferentes, porém equivalentes. Essas equivalências devem ser claras para os alunos. A atividade 2 da **página 150** e a atividade 6 da **página 151** exploram exatamente esse aspecto.

A escala é um exemplo de razão entre grandezas de mesma natureza e pode ser compreendida como a indicação de quantas vezes o comprimento real foi reduzido. Para ampliar as propostas de trabalho com escalas, você pode solicitar que os alunos, divididos em grupos, elaborem plantas de alguns ambientes da escola obedecendo a determinada escala. Em seguida, propor que os grupos comparem as plantas obtidas. Se julgar conveniente, antecipe as atividades 9 e 23 do item Aplicando da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 158** a **161**).

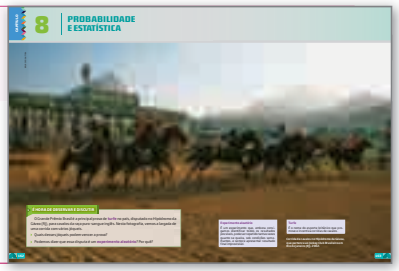
O conceito de escala também é fundamental para ler e interpretar mapas. Os alunos devem compreender que o mapa é uma maneira de representar parte da Terra no plano, e que por esse motivo é preciso saber o quanto esse mapa foi diminuído em relação ao tamanho real. É importante que entendam, por exemplo, que dizer que um mapa possui a escala 1: 10.000 significa que cada 1 cm no mapa equivale a 10.000 cm na realidade, ou seja, 100 metros. Portanto, se uma rua desse mapa tiver 3 cm, ela terá 300 metros de medida real. A partir dessa ideia, é possível propor aos alunos que estimem a distância real, em linha reta, entre duas cidades quaisquer presentes em um determinado mapa. Esse também pode ser o momento adequada para elaborar uma atividade interdisciplinar envolvendo leitura e interpretação de mapas com o professor de Geografia.

Ao trabalharem com razões entre grandezas de naturezas diferentes, os alunos podem ser incentivados a pesquisar razões que são utilizadas no dia a dia, diferentes das exploradas no livro, como, por exemplo, a gramatura do papel: razão entre a massa e a área de um papel. Além disso, em parceria com o professor de Geografia, pode-se pedir que elaborem uma pesquisa a respeito das densidades demográficas de cada um dos estados e, posteriormente, de cada uma das regiões brasileiras. Os dados podem ser buscados, por exemplo, no *site* do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) e então analisados e tratados pelos alunos. Pode-se ainda solicitar a eles que, usando a noção de razão, comparem o número de homens e mulheres que habitam cada um dos estados ou regiões brasileiras.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 8

Probabilidade e Estatística



Conteúdos abordados

Conceito de probabilidade e noção de experimento aleatório; cálculo de probabilidades; Estatística (gráficos de barras verticais e barras horizontais); média aritmética simples, média aritmética ponderada, mediana e moda.

Objetivos

- Compreender o que é probabilidade, noção de experimento aleatório e saber distinguir um experimento aleatório de outro não aleatório.
- Aprender a calcular probabilidades, identificar situações nas quais esse tipo de cálculo é necessário e mobilizar os conhecimentos construídos para a resolução de problemas.
- Compreender o que é Estatística e identificar situações envolvendo estudos estatísticos.
- Ler, interpretar e construir gráficos de barras verticais e horizontais.
- Compreender o conceito e como se determinam média aritmética simples e média aritmética ponderada de um conjunto de dados.
- Compreender os conceitos de mediana e moda, como calcular essas medidas e utilizar os conhecimentos construídos para a resolução de problemas.

Orientações

Esse capítulo é importante porque introduz os raciocínios estatísticos e probabilísticos, fundamentais para a formação do estudante como cidadão crítico, autônomo e capaz de analisar com precisão e discernimento informações que lhe são apresentadas por meio do tratamento estatístico de um conjunto de dados. Ao trabalhar situações envolvendo tratamento de informações, os alunos são levados a desenvolver a capacidade de ler e interpretar tabelas e diferentes tipos de gráficos, o que é essencial para que possam compreender dados divulgados diariamente pelos meios de comunicação e refletir a respeito deles de forma crítica.

Antes de explorar a noção de experimento aleatório, é possível discutir com os alunos o significado do termo *aleatório,* que está associado à dependência de um acontecimento incerto. Para que possam, de fato, compreender a noção de experimento aleatório, é importante que nas aulas eles tenham a oportunidade de simular sorteios ou experimentos, como, por exemplo, lançar uma moeda determinado número de vezes e avaliar a ocorrência de "caras" ou "coroas", lançar um dado determinado número de vezes e observar a ocorrência de cada face etc. Perguntas sobre a chance de sair "cara" ou "coroa" ao lançar uma moeda ou determinada face de um dado antes de lançá-lo permitem levantar o conhecimento prévio dos alunos no que tange ao conceito de probabilidade. As atividades 1 e 2 da **página 166** exploram intuitivamente a noção de experimento aleatório e é importante incentivar os alunos a compartilhar como pensaram e os exemplos de experimentos aleatórios e não aleatórios citados.

Ao introduzir as noções de probabilidade e de Estatística, peça aos alunos que busquem a origem desses termos para que possam começar a compreender seus significados. Também pode ser proposta uma pesquisa, na internet, a respeito do desenvolvimento histórico da probabilidade e da Estatística.

As atividades 3, 4 e 6 da **página 166**, as atividades 2 e 5 da **página 167** e as atividades 1, 2, 4 e 5 do item Aplicando da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 176** a **179**) envolvem figuras por meio das quais os alunos podem obter diretamente a probabilidade desejada. Situações como essas permitem que eles trabalhem de maneira bastante ilustrativa com a definição de probabilidade como razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades de ocorrência de um evento.

É possível chamar a atenção dos alunos para que percebam que a probabilidade é uma razão que exprime a comparação entre o número de possibilidades favoráveis e o total de possibilidades de ocorrência de um evento. É importante, então, que, ao definir probabilidade, você retome o conceito de razão, trabalhado no capítulo anterior, e a ideia de que, ao obter uma razão entre números que trazem informações a respeito de determinadas grandezas, estamos, na verdade, estabelecendo uma comparação entre elas.

Sendo probabilidade uma razão, deve ficar claro para os alunos que ela pode ser representada tanto por uma fração irredutível como por um número decimal ou uma porcentagem.

É fundamental que, ao explorar a definição de probabilidade como razão, você leve os alunos a concluir que não faz sentido probabilidade negativa (uma vez que, para isso, o número de possibilidades favoráveis de um experimento ou o número total de possibilidades de um experimento deve ser negativo) e que também não faz sentido probabilidade maior que 1 (já que isso implicaria a existência de um experimento com um número de possibilidades favoráveis maior do que o número total de possibilidades). Dessa forma, a probabilidade é um número de 0 a 1, onde o 0 diz respeito à impossibilidade de um evento ocorrer e o 1, à certeza de que o evento ocorrerá. Embora esses aspectos não apareçam no livro, você deve destacá-los em sala de aula. Além disso, é de grande valia propor reflexões que levem os alunos a essas conclusões, e não apresentá-las prontas.

Ao iniciar o estudo do tópico 3, em que se trabalha a noção de Estatística, bem como a leitura e a interpretação de gráfico de barras, é possível solicitar que cada aluno leve para a sala de aula alguma notícia publicada recentemente em jornal, revista ou *site* que faça uso de dados estatísticos envolvendo tabelas ou gráficos diversos. Você pode aproveitá-las para analisar, do ponto de vista estatístico, juntamente com os alunos, levando-os a perceber como atribuir significado aos dados apresentados e como interpretá-los. Esse tipo de atividade contribui para que analisem e relacionem criticamente os dados apresentados, questionando ou ponderando até mesmo sua veracidade. Interpretar e comparar dados é tão importante quanto organizar e representar uma coleção de dados.

Esse tipo de atividade também contribui para que os alunos percebam a variedade de formas possíveis de apresentar dados tratados estatisticamente e também a função dessas diversas representações, que é a de facilitar a compreensão de determinados aspectos ou particularidades daquilo que está sendo estudado.

Ao trabalhar com a construção de gráficos estatísticos de diferentes tipos, reforce para os alunos quais cuidados devem ser tomados durante essas construções (escolha do tipo de gráfico, que deve levar em consideração os dados a serem representados, a escala a ser utilizada etc.) para que, de fato, a representação gráfica seja vantajosa. A identificação dos eixos e a indicação do título dos gráficos devem ser incentivadas durante as aulas, pois contêm informações que devem ser examinadas com cuidado.

Ao introduzir as noções de média aritmética e de média ponderada, peça aos alunos que busquem outras situações, além das apresentadas no livro, em que cada um desses tipos de média seja utilizado. É importante que percebam que o resultado fornecido pela média aritmética ponderada seria o mesmo caso fosse usada a média aritmética simples. Para que os alunos se convençam disso, é recomendado que efetuem o cálculo das duas médias com base no mesmo conjunto de dados.

As médias aritméticas simples e ponderada, bem como a mediana e a moda, caracterizam um conjunto de valores. Convém usar a média quando o conjunto de dados não apresenta valores discrepantes, pois, caso contrário, o resultado fornecido pode desencadear conclusões falhas. A mediana representa melhor o conjunto de dados quando este apresenta valores discrepantes, pois esses dados não "contaminam" o seu valor. Mais importante do que o cálculo dessas medidas é o trabalho com a interpretação delas. Pode-se, sempre que possível, incentivá-los a observar os aspectos acima apontados trabalhando o cálculo dessas medidas com base num conjunto de dados sem valores discrepantes e depois acrescentando um valor bem maior ou menor que os demais.

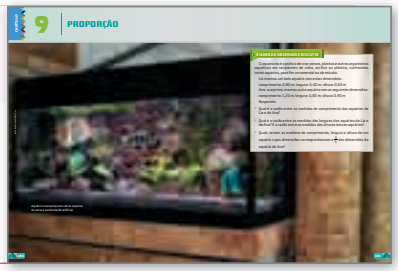
Depois de apresentar as noções de média e mediana, informe aos alunos que uma desvantagem da média é que ela é influenciada por valores extremos, o que não ocorre em grande proporção com a mediana, que, por outro lado, é difícil de determinar quando temos uma grande quantidade de dados.

Planilhas eletrônicas como o Excel e *softwares* como o Geogebra, que é gratuito, possuem ferramentas e recursos que permitem realizar o tratamento estatístico de dados e a representação de tais dados por meio de gráficos de diferentes tipos, quadros e tabelas. Sempre que possível, explore esses recursos, além da calculadora.

Espaço para anotações do professor

CAPÍTULO 9

Proporção



Conteúdos abordados

Proporção e seus elementos (extremos e meios); propriedade fundamental das proporções; sequências de números diretamente proporcionais; sequências de números inversamente proporcionais.

Objetivos

- Compreender a noção de proporção e identificar os elementos que compõem uma proporção.
- Compreender a propriedade fundamental das proporções e saber mobilizá-la para a resolução de problemas.
- Identificar e compreender o que são sequências diretamente proporcionais e mobilizar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas envolvendo essa ideia.
- Identificar e compreender o que são sequências inversamente proporcionais e mobilizar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas envolvendo essa ideia.

Orientações

Antes de iniciar o estudo do tema com os alunos, é conveniente investigar o que entendem por proporção e se eles conhecem situações nas quais essa noção está presente. A partir das ideias manifestadas você pode planejar a abordagem que fará do assunto a ser trabalhado.

Ao definir proporção como uma igualdade entre duas razões, pode-se deixar claro aos alunos que não basta igualar duas razões quaisquer para obter uma proporção. As atividades 1 e 3 da **página 184** e as atividades 1 e 2 da **página 187** exploram essa ideia.

Aproveitando a seção *Um pouco de História* da **página 183**, é possível solicitar aos alunos que realizem uma pesquisa, na internet ou em livros da biblioteca (se houver uma na escola), a respeito do desenvolvimento da teoria das proporções, visando aprofundar as informações apresentadas no livro. Nessa pesquisa, deve-se dar ênfase especial às contribuições de Eudoxo para o estudo das proporções. A análise da definição de proporção proposta pelo matemático fornecerá elementos que, posteriormente, serão essenciais para que os alunos compreendam a noção de número irracional.

Outra discussão que pode ser realizada é a respeito da utilização das proporções na arte. Essa reflexão pode ser disparada – e também dar origem a uma pesquisa a ser proposta aos alunos – a partir da seção *Lendo e aprendendo* da **página 184**, relativa ao desenho do Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci.

Para que os alunos se apropriem dos conceitos de sequências de números direta e inversamente proporcionais, você pode solicitar que criem sequências e as troquem com um colega, para que ele identifique se são direta ou inversamente proporcionais, e determinem em cada caso a constante de proporcionalidade.

CAPÍTULO 10

Grandezas e regra de três

Conteúdos abordados

Grandezas proporcionais (grandezas direta e inversamente proporcionais); regra de três simples; regra de três composta.

Objetivos

- Compreender o conceito de grandezas proporcionais.
- Identificar se duas grandezas são direta ou inversamente proporcionais ou não proporcionais.
- Resolver situações-problema que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.
- Entender a regra de três simples e a composta e aplicá-las para resolver problemas de proporcionalidade.

Orientações

Ao iniciar o estudo desse capítulo você pode retomar as noções de razão e proporção trabalhadas anteriormente, pois são importantes para que os alunos possam se apropriar dos conceitos que serão estudados.

É possível construir com eles uma lista das grandezas que conhecem e suas respectivas unidades de medida. Isso poderá ajudá-los a resgatar os conteúdos trabalhados anteriormente e que serão importantes para o desenvolvimento dos conceitos que serão explorados no capítulo. É possível propor, ainda, que reflitam sobre como essas grandezas podem se relacionar e explorem intuitivamente as noções de proporcionalidade entre elas. Isso poderá contribuir para que você faça um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos e planejar atividades que possam ampliar o repertório deles.

Ao trabalhar a seção *Trocando ideias* (**página 198**) é importante que os alunos percebam que, ao fazer a redução ou a ampliação de figuras, a forma original se mantém, ou seja, não há deformação. Essa noção será importante quando estudarem figuras semelhantes.

Ao trabalhar o conceito de grandezas proporcionais no tópico 1, é importante que os alunos reconheçam a existência ou não de proporcionalidade em diversas situações propostas e identifiquem em quais delas a proporcionalidade é direta ou inversa. É fundamental que compreendam que o fato de uma das grandezas aumentar quando a outra aumenta, ou diminuir quando outra diminui, não é suficiente para que sejam diretamente proporcionais. É importante tomar cuidado com algumas situações-problema contextualizadas que são propostas aos alunos, pois às vezes elas não condizem com a realidade. Por exemplo, se um ciclista percorre 10 km em 1 hora, quanto tempo levará para percorrer 300 km? Desconsiderando o contexto da pergunta, a resposta indicaria 30 horas; porém, nenhum atleta consegue manter a mesma média de velocidade por tanto tempo. Você pode até propor questões desse tipo, desde que o foco esteja na reflexão sobre a plausibilidade da resposta, o que pode contribuir significativamente para aguçar o senso crítico dos alunos.

A construção de tabelas pode ser uma estratégia interessante para que os alunos reconheçam se os valores das grandezas são direta ou inversamente proporcionais. No caso de grandezas diretamente proporcionais, é importante que eles percebam que, ao dobrar o valor de uma, o valor da outra também dobra; ao reduzir pela metade o valor de uma, o valor da outra também reduz pela metade, e assim por diante. Já no caso das grandezas inversamente proporcionais, é importante que percebam que, ao dobrar o valor de uma, o valor da outra reduz pela metade; ao dividir por 4 o valor de uma, o valor da outra é multiplicado por 4, e assim por diante. Você pode propor aos alunos que, em duplas, façam uma lista de grandezas direta e inversamente proporcionais e que, em seguida, eles a compartilhem com os colegas. Isso favorece a percepção das possibilidades de integração entre áreas diferentes da Matemática (Grandezas e Medidas e Números e Operações).

Na **página 200**, você pode chamar a atenção para que, ao adicionar dois valores quaisquer da 1ª linha, a soma obtida é proporcional à soma dos dois valores correspondentes da 2ª linha. Observe o exemplo a seguir.

Produção (kg)	100	200	300 (100 + 200)	500 (200 + 300)
Tempo (min)	5	10	15 (5 + 10)	25 (10 + 15)

É fundamental que o trabalho com grandezas direta e inversamente proporcionais esteja pautado em situações que os alunos vivenciam em seu cotidiano, pois isso contribui para que eles atribuam significado a essas noções trabalhadas. Incentivar os alunos a criarem problemas envolvendo proporcionalidade e trocá-los com um colega é uma estratégia que pode desenvolver a criatividade e servir como avaliação sobre o que apreenderam e os pontos em que estão com dificuldade.

Ao trabalhar a regra de três simples, no tópico 2, é interessante que os alunos percebam que esse é um processo prático para resolver problemas em que esteja presente o conceito de proporcionalidade e envolvam quatro valores, dos quais conhecemos três. Mesmo em algumas situações em que se pode aplicar a regra de três simples, é fundamental incentivá-los a construir tabelas ou a desenvolver estratégias próprias de cálculo mental. Uma das dificuldades no entendimento da proporcionalidade é a ênfase que muitas vezes é dada a essa regra. Pesquisas em Educação Matemática evidenciam que o desenvolvimento do raciocínio proporcional deve estar pautado em atividades concretas, questionamentos, discussões, exemplos e contraexemplos. Enfatizar muito cedo a aprendizagem de algoritmos pode impedir os alunos de assimilar e aplicar corretamente os conceitos.

Antes de trabalhar a regra de três composta, apresentada no tópico 3, você pode propor aos alunos que resolvam algumas situações-problema em que essa regra pode ser aplicada, porém usando suas próprias estratégias. Isso poderá contribuir para que percebam como a regra poderá otimizar o trabalho na resolução desse tipo de problema e para evitar que a apliquem de maneira acrítica.

As atividades da seção *Trabalhando os conhecimentos adquiridos* (**páginas 207** a **209**) são bastante variadas e mobilizam diferentes grandezas. O uso de figuras, assim como de situações que apresentem grandezas que não são nem direta nem inversamente proporcionais, colabora para ampliar o repertório dos alunos. Nesse sentido, é de grande valia, ao corrigir coletivamente as atividades, conversar sobre as diferentes formas de resolução dos problemas. Você pode chamar a atenção para o fato de que os caminhos que diferem da regra de três também são corretos, embora às vezes não sejam os mais "econômicos".

CAPÍTULO 11

Porcentagem e juro simples

Conteúdos abordados

Porcentagem; cálculo de acréscimos e descontos; juro simples.

Objetivos

- Compreender o conceito de porcentagem.
- Aplicar o conceito de porcentagem para resolver situações-problema.
- Calcular acréscimos e descontos.
- Entender o conceito de juro simples e aplicá-lo para resolver situações-problema.

Orientações

Em todo o estudo desse capítulo é recomendável incentivar os alunos a mobilizar as representações na forma de razão e na forma decimal de uma porcentagem; por exemplo, $20\% = \frac{20}{100} = 0,2$. Isso poderá contribuir não somente para a apreensão desse conceito, como também para otimizar os cálculos.

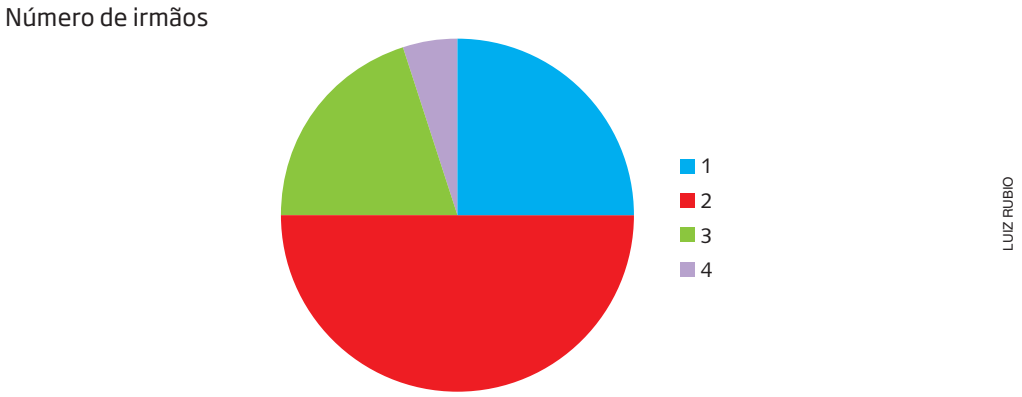
A proposta da seção *Trocando ideias* (**página 212**) contribui para que os alunos percebam quão presente é o conceito de porcentagem em seu cotidiano. Você pode propor que construam coletivamente um mural com recortes de manchetes de jornais ou revistas em que apareçam porcentagens. Em seguida, é possível propor que discutam sobre o significado das porcentagens presentes em cada uma delas.

Dedique atenção especial ao infográfico da situação 3 (**páginas 214** e **215**), pois sua compreensão exige que sejam mobilizados os conhecimentos dos alunos referentes à leitura e à interpretação de gráficos e de informações expressas em porcentagem. É possível propor que discutam sobre a importância de ter bons hábitos alimentares e sobre as características dos alimentos saudáveis e não saudáveis. Esse pode ser o momento oportuno para planejar uma atividade interdisciplinar com o professor de Ciências sobre alimentação e saúde.

O estudo de ângulos pode ser retomado de maneira bastante concreta e interessante para a construção de um gráfico de setor com dados em porcentagem. Uma das possíveis maneiras de abordá-lo é fazer uma pesquisa em sala, com dados dos próprios alunos, e elaborar uma tabela. Por exemplo, número de irmãos, esporte ou time de futebol favorito etc. Na tabela, anote os valores obtidos com a pesquisa e as porcentagens para cada item. Em outra coluna anote os respectivos ângulos, que são encontrados utilizando a proporcionalidade e o fato de que 100% corresponde a um ângulo de 360°. Ao elaborar os gráficos, evidencie a proporcionalidade entre ângulo central e a área do setor circular de uma circunferência e seus arcos correspondentes.

Após a pesquisa em sala, proponha aos alunos que preencham a tabela e depois construam o gráfico de setor.

Nº de irmãos	Nº de alunos	%	Medida do ângulo central (º)
1	10	25	90
2	20	50	180
3	8	20	72
4	2	5	18
Total	40	100	360



Uma vez construído o gráfico de setor para a situação proposta, é importante prosseguir com atividades nas duas formas: dada uma tabela, elaborar o gráfico correspondente, como foi feito acima, e dado um gráfico elaborar uma tabela.

Durante a resolução das atividades propostas no capítulo, é de grande valia incentivar os alunos a fazer uma estimativa antes de realizar os cálculos. Isso poderá ajudá-los a avaliar se os resultados encontrados são ou não plausíveis. Outra possibilidade é estimulá-los a determinar algumas porcentagens mentalmente. Para isso, é importante perceberem que 50% de uma quantidade se refere à metade dessa quantidade, assim como 25% se refere a $\frac{1}{4}$, 10% a $\frac{1}{10}$, e assim por diante.

A seção *Lendo e aprendendo* (**página 220**) mostra como a calculadora pode ser usada para cálculos de acréscimos ou descontos envolvendo porcentagem. É possível propor alguns problemas aos alunos e solicitar que os resolvam com o auxílio da calculadora para que possam se familiarizar com esse equipamento e colocar em prática o que aprenderam.

No tópico 3, em que é trabalhado o conceito de juro simples, vale a apena permitir que, durante a resolução das atividades, os alunos troquem informações e analisem as soluções apresentadas pelos colegas, buscando aprimorar as próprias formas de raciocínio. Você pode comentar também que na prática é mais comum, sobretudo em aplicações financeiras, o uso do sistema de juro composto (que será trabalhado adiante). Após trabalhar esse conceito, você pode selecionar algumas manchetes do mural construído por eles e solicitar que as interpretem. Esse pode ser o momento oportuno para avaliar as eventuais dificuldades encontradas e esclarecer as dúvidas.

É importante que, desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos sejam apresentados a elementos da educação financeira que, assim como a probabilidade e a Estatística, podem contribuir significativamente para a formação deles como cidadãos. Com a seção *Lendo e aprendendo* da página 222, aproveite para retomar o cálculo da média aritmética ponderada e trabalhar, ainda que de maneira introdutória, com dois índices de preços utilizados para medir a inflação no país: o IPCA e o INPC. Note que a seção apresenta o IPC, que corresponde apenas à cidade de São Paulo, enquanto o IPCA é nacional. Você pode propor a seguinte atividade aos alunos:

- **Atividade:** Os índices IPCA e INPC são calculados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

  O **Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC)** é o índice que fornece subsídios para os reajustes de salários, já que mede a variação do custo de vida de pessoas que recebem até 5 salários mínimos.

  O **Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)** é o medidor oficial da inflação no país.

  De acordo com o Banco Central, a coleta de preços para o cálculo desses dois índices engloba as nove maiores regiões metropolitanas do país (Belém, Belo Horizonte, Curitiba, Fortaleza, Porto Alegre, Recife, Rio de Janeiro, Salvador, São Paulo) mais o município de Goiânia e o Distrito Federal. Os índices nacionais são calculados por meio de médias ponderadas, calculadas a partir dos índices regionais. As faixas de renda cobertas por esses dois tipos de índices são diferentes: enquanto o IPCA engloba rendas familiares de qualquer natureza até 40 salários mínimos, o INPC se restringe àqueles indivíduos com renda entre 1 e 5 salários mínimos. Para a realização da pesquisa de preços, o IBGE leva em consideração a variação de preços de produtos e serviços pertencentes aos seguintes grupos: alimentação e bebidas, habitação, artigos de residência, vestuário, transportes, saúde e cuidados pessoais, despesas pessoais, educação e comunicação. A cada mês, com base na variação relativa dos preços dos bens e serviços de cada um desses grupos, é feita uma reestimativa para avaliar o peso relativo de cada um deles no cálculo final do índice. A coleta dos preços é sempre realizada em estabelecimentos comerciais e de prestações de serviços, concessionárias de serviços públicos e domicílios. Coleta-se, ao longo do mês, sempre o valor à vista do produto e os índices são divulgados no início do segundo decênio do mês seguinte.

  De acordo com informações presentes no *site* do IBGE, órgão responsável pelo cálculo do IPCA e do INPC, em outubro de 2013, os índices regionais e seus respectivos pesos para o cálculo dos índices nacionais foram os seguintes:

Região	IPCA regional	Pesos (em %)	INPC regional	Pesos (em %)
Goiânia	0,92	4,44	0,93	5,27
São Paulo	0,69	31,68	0,74	25,24
Recife	0,66	5,05	0,74	7,17
Curitiba	0,63	7,79	0,63	7,03
Belém	0,58	4,65	0,62	7,29
Porto Alegre	0,55	8,40	0,58	7,38
Rio de Janeiro	0,54	12,46	0,52	9,91
Brasília	0,46	3,46	0,52	11,04
Fortaleza	0,44	3,49	0,48	6,61
Belo Horizonte	0,42	11,23	0,43	2,39
Salvador	0,14	7,35	0,38	10,67

  Com base nas informações presentes na tabela, determine, junto com os alunos, para outubro de 2013, os valores nacionais dos índices IPCA e INPC.

  Resposta: 5,19% (IPCA) e 5,38% (INPC).